詳細解答

STEP II 2018，第 8 題

純數學 • 伯努利微分方程

> **STEP II 2018，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q8

關鍵思路

兩條方程都是伯努利方程（Bernoulli equation）：右方出現 y 的冪，破壞了線性（linearity），但只要選取 y 的適當冪作為新變量，方程便會變成線性。設 $y = v^2$（或 $y = v^3$），公因子 v（或 v^2）可以約去，餘下的是一條常係數一階線性方程（first-order linear equation），可用積分因子（integrating factor）或分離變量（separating variables）求解。至於作圖，比較兩條曲線最簡潔的方法，是把兩者都以同一個指數 $u = e^{-t/6}$ 表示。

解答

題目寫的是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，但自變量（independent variable）自始至終都是 t，所以我們寫成 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$。

第 (i) 部分

設 $y = v^2$，其中 $v = \sqrt{y} \geq 0$。於是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 及 $y^{1/2} = v$，方程變為

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v - \beta v^2.$$

其中一個解是 $v \equiv 0$，即常數解（constant solution）$y \equiv 0$。在 $v \neq 0$ 之處，我們可以除以 v：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{2}v = \frac{\alpha}{2}.$$

這是線性方程，積分因子為 $e^{\beta t/2}$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ve^{\beta t/2}\right) = \frac{\alpha}{2}e^{\beta t/2} \quad \Longrightarrow \quad ve^{\beta t/2} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta t/2} + C.$$

因此通解（general solution）為

$$\sqrt{y} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}, \qquad \text{即} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}\right)^2,$$

其中 C 為常數（只取括號內非負的範圍，因為 $v = \sqrt{y} \geq 0$），另外還有常數解 $y \equiv 0$。取 $C = 0$ 則得到另一個常數解 $y \equiv \alpha^2/\beta^2$。

要 $y_1(0) = 0$，便需要 $v(0) = 0$，故 $C = -\alpha/\beta$，而

$$\boxed{y_1(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t/2}\right)^2}$$

這個解不是常數，而且當 $t \geq 0$ 時括號 $1 - e^{-\beta t/2}$ 非負，所以它確實是一個解。（在 $t > 0$ 時 $v > 0$，所以除以 v 是合理的。）

第 (ii) 部分

現在冪是 $\frac{2}{3}$，所以我們希望 $y^{2/3}$ 與 y 有公因子。設 $y = v^3$，即 $v = y^{1/3} \geq 0$。於是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3v^2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 及 $y^{2/3} = v^2$，得

$$3v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v^2 - \beta v^3.$$

想一想 你會怎樣想到代換 $v = y^{1/3}$？

在第 (i) 部分，$v = y^{1-\frac{1}{2}}$ 令兩邊都有公因子 v。對伯努利方程 $\dot{y} = \alpha y^n - \beta y$ 而言，代換 $v = y^{1-n}$ 總是奏效，而這裏 $1 - n = \frac{1}{3}$。

除了 $v \equiv 0$（即常數解 $y \equiv 0$）之外，除以 v^2：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}v = \frac{\alpha}{3}.$$

以積分因子 $e^{\beta t/3}$，與之前完全一樣，得

$$y^{1/3} = \frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}, \qquad \text{即} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}\right)^3,$$

其中 D 為常數（括號內非負）。條件 $y_2(0) = 0$ 迫使 $D = -\alpha/\beta$，故

$$\boxed{y_2(t) = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - e^{-\beta t/3}\right)^3}$$

第 (iii) 部分

當 $\alpha = \beta$ 時，

$$y_1(t) = \left(1 - e^{-t/2}\right)^2, \qquad y_2(t) = \left(1 - e^{-t/3}\right)^3.$$

每條曲線的形狀。兩條曲線都從 0 開始並且遞增，因為 $1-e^{-t/2}$ 和 $1-e^{-t/3}$ 都由 0 增加並趨向 1。當 $t\to\infty$ 時兩者都趨向 1，即 (i) 的常數解 $y=\alpha^2/\beta^2=1$ 與 (ii) 的常數解 $y=\alpha^3/\beta^3=1$。求導得

$$y_1'=e^{-t/2}\left(1-e^{-t/2}\right),\qquad y_2'=e^{-t/3}\left(1-e^{-t/3}\right)^2,$$

所以兩者在原點的斜率都是零。斜率 $y_1'=w(1-w)$（其中 $w=e^{-t/2}$）在 $w=\frac12$ 時最大，所以 y_1 在 $t=2\ln 2$、$y_1=\frac14$ 處有拐點（point of inflection）。同樣，$y_2'=w(1-w)^2$（其中 $w=e^{-t/3}$）在 $w=\frac13$ 時最大，得拐點在 $t=3\ln 3$、$y_2=\frac{8}{27}$。每條曲線都呈 S 形，由原點上升至漸近線（asymptote）$y=1$。

相對位置。設 $u=e^{-t/6}$，則當 $t>0$ 時 $0<u<1$，且 $e^{-t/2}=u^3$、$e^{-t/3}=u^2$。於是

$$y_1=(1-u^3)^2=(1-u)^2(1+u+u^2)^2,\qquad y_2=(1-u^2)^3=(1-u)^3(1+u)^3,$$

因此

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{(1+u+u^2)^2}{(1-u)(1+u)^3}.$$

展開得 $(1+u+u^2)^2=1+2u+3u^2+2u^3+u^4$ 及 $(1-u)(1+u)^3=(1-u^2)(1+u)^2=1+2u-2u^3-u^4$。分子減分母為

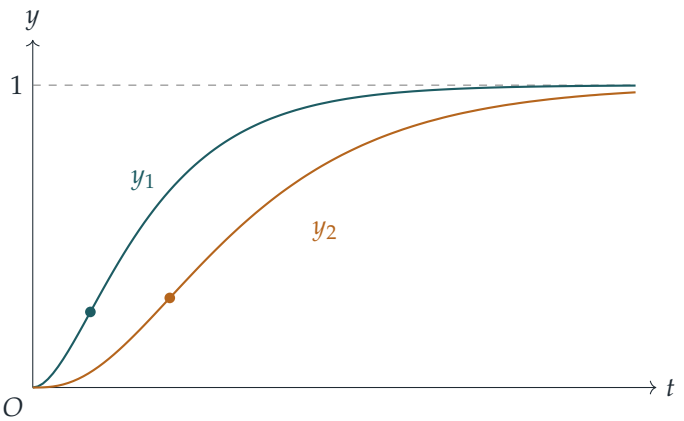
$$3u^2+4u^3+2u^4>0\qquad(0<u<1),$$

而分母為正，所以 $y_1/y_2>1$。因此

$$y_1(t)>y_2(t)\quad\text{對所有}t>0:$$

兩條曲線只在原點相交，而在其他地方 y_1 都位於 y_2 之上。

這與兩端的表現吻合。在 $t=0$ 附近，$y_1\approx\frac{t^2}{4}$，而 $y_2\approx\frac{t^3}{27}$，後者小得多。當 t 很大時，$1-y_1\approx 2e^{-t/2}$ 而 $1-y_2\approx 3e^{-t/3}$，且 $e^{-t/3}$ 衰減得較慢，所以 y_2 離漸近線較遠。



圖中的點標示拐點：y_1 上的 $(2\ln 2,\frac14)$ 及 y_2 上的 $(3\ln 3,\frac{8}{27})$。

驗算

- 代回原方程：對 y_1，取 $\alpha = \beta = 1$，則 $y_1^{1/2} - y_1 = (1-w) - (1-w)^2 = w(1-w)$，其中 $w = e^{-t/2}$，這正是 y_1'。
- t 很大時：$y_1 \to \alpha^2/\beta^2$，即 $\alpha y^{1/2} = \beta y$ 的非零解；同樣 $y_2 \to \alpha^3/\beta^3$，即 $\alpha y^{2/3} = \beta y$ 之處。
- 取 $\alpha = \beta = 1$ 的數值：在 $t = 2$ 時，$y_1 \approx 0.400$、$y_2 \approx 0.115$；在 $t = 10$ 時，$y_1 \approx 0.987$、$y_2 \approx 0.897$。兩條公式亦已用電腦對微分方程作逐步數值積分加以驗證。

常見錯誤

- 除以 v（或 v^2）時沒有指出 $y \equiv 0$ 也是一個解。正因如此，題目才要求通過原點的非常數解。
- 弄錯指數：代換 $y = v^3$ 得出的是 $e^{-\beta t/3}$，而不是 $e^{-\beta t/2}$。
- 單憑斜率判斷兩條曲線的高低。在兩條曲線高度相同、$y \in (0,1)$ 之處，$y^{2/3} > y^{1/2}$，所以 y_2 在那裏會上升得較快；但這並不能說明哪條曲線較高，因此需要直接比較。

STEP 之外

這些是伯努利方程，屬大學一年級的標準方程類型，以 $v = y^{1-n}$ 求解。它們亦展示了解的非唯一性（non-uniqueness）：由於 $y^{1/2}$ 和 $y^{2/3}$ 在 $y = 0$ 處斜率無限大，右方在該處不滿足利普希茨條件（Lipschitz condition），於是 $y \equiv 0$ 與 y_1 都通過原點。事實上，先停留在 0 直至任意時刻 t_0，然後沿着 $y_1(t - t_0)$ 走，便得到一整族解。皮卡–林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）準確說明了何時不會出現這種情況。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《基礎微分方程》）同時涵蓋伯努利方程及解的存在性與唯一性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。