詳細解答

STEP II 2018，第 7 題

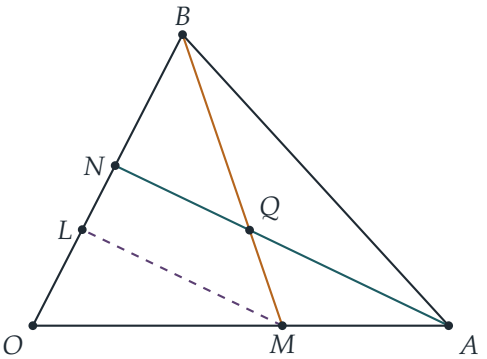
純數學 • 幾何中的向量

> **STEP II 2018，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q7

關鍵思路

由於 M 在 OA 上，而 N 在 OB 上，我們可以把 **m** 寫成 **a** 的倍數，把 **n** 寫成 **b** 的倍數。然後點 Q 可以從兩條路徑到達：一次沿 BM，一次沿 AN。每條路徑都把 **q** 表示為 **a** 與 **b** 的組合。由於 **a** 與 **b** 不平行（parallel），我們可以比較係數（compare coefficients），所有結果便由此而得。

解答



求 m

設 $\mathbf{m} = m\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{n} = n\mathbf{b}$，其中 $0 < m < 1$ 及 $0 < n < 1$，因為 M 和 N 都在三角形的邊上。

沿 BM。Q 位於 M 與 B 之間，且 $MQ : QB = \mu : 1$，所以 Q 位於由 M 到 B 全程的 $\frac{\mu}{1+\mu}$

處：

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}(\mathbf{b} - \mathbf{m}) = \frac{1}{1+\mu}\,\mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b} = \frac{m}{1+\mu}\,\mathbf{a} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

沿 AN。同理，$NQ : QA = \nu : 1$，所以

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} + \frac{\nu}{1+\nu}(\mathbf{a} - \mathbf{n}) = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+\nu}\,\mathbf{n} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{n}{1+\nu}\,\mathbf{b}.$$

想一想 為甚麼我們可以分別令 **a** 的係數相等，以及 **b** 的係數相等？

O、A、B 是一個真正三角形的頂點，所以 **a** 與 **b** 都非零且不平行。若 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 而 $\beta \neq 0$，則 **b** 會是 **a** 的倍數；所以 $\beta = 0$，繼而 $\alpha = 0$。因此平面上每個向量都只有唯一一種表示為 **a** 與 **b** 組合的方式。

把 **q** 的兩個表達式相減並比較係數：

$$\frac{m}{1+\mu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \qquad \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{n}{1+\nu}.$$

第一式給出 $m = \dfrac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}$，即

$$\mathbf{m} = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a},$$

正如所求。第二式以角色互換的同一論證給出

$$\mathbf{n} = \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

求 λ

現在 $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{b}$，所以

$$\overrightarrow{ML} = \lambda\mathbf{b} - m\,\mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{AN} = n\,\mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

兩者平行當且僅當對某個純量（scalar）k 有 $\overrightarrow{ML} = k\,\overrightarrow{AN}$。比較 **a** 的係數（理由同前）得 $k = m$，再由 **b** 的係數得 $\lambda = kn = mn$。（從幾何角度看：$ML \parallel AN$ 使三角形 OML 與 OAN 相似（similar），所以 $OL/ON = OM/OA$。）因此

$$\lambda = mn = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu} = \mu\nu.$$

條件 $\mu\nu < 1$

$$m < 1 \iff (1+\mu)\nu < 1+\nu \iff \mu\nu < 1,$$
$$n < 1 \iff \mu(1+\nu) < 1+\mu \iff \mu\nu < 1,$$

這裏利用了 $1+\nu>0$ 及 $1+\mu>0$ 來消去分母。所以，在 μ 和 ν 均為正數的前提下，條件 $\mu\nu<1$ 正正就是 M 嚴格位於 O 與 A 之間、N 嚴格位於 O 與 B 之間所需的條件。換句話說，直線 AN 與 BM（Q 按這些比把它們分割）在三角形內部相交。這條件亦表示 $\lambda<1$：經過 M 而平行於 AN 的直線與 OB 相交於 O 與 B 之間，而由於 M 在邊 OA 上，這是必然的。若 $\mu\nu=1$，則 $M=A$ 及 $N=B$，整個圖形退化；若 $\mu\nu>1$，則 M 和 N 位於延長邊上 A 和 B 之外。

驗算

- 中線。若 M 和 N 是中點，則 Q 是重心（centroid），它把每條中線（median）分成由頂點起計 2 : 1 的比。所以 $\mu=\nu=\frac{1}{2}$，而公式給出 $m=\frac{(3/2)(1/2)}{3/2}=\frac{1}{2}$，與預期相符。於是 $\lambda=\frac{1}{4}$：在三角形 OAN 中應用中點定理（midpoint theorem），L 是 ON 的中點，即位於 OB 全長的四分之一處。
- 對稱性。互換 $A\leftrightarrow B$ 會互換 $M\leftrightarrow N$ 及 $\mu\leftrightarrow\nu$，而 m 與 n 的公式亦正確地互換。答案 $\lambda=\mu\nu$ 同樣是對稱的。
- 以電腦對約 10^5 個隨機三角形進行驗算，在邊上隨機取 M 和 N，量度 μ 和 ν，並確認 m、n 及 $\lambda=\mu\nu$ 均準確至 10^{-12} 以內。例如 $m=0.6$ 及 $n=0.55$（如圖所示）給出 $\lambda=0.33$。

常見錯誤

- 把分點比（section ratio）的方向弄反：Q 位於由 M 到 B 全程的 $\frac{\mu}{1+\mu}$ 處，而不是由 B 到 M。
- 令係數相等而不說明原因。這一步依賴 **a** 與 **b** 不平行。
- 以為「三角形是銳角三角形」這個條件會起作用。其實不會：論證對任何三角形都成立。

STEP 之外

比較係數之所以可行，是因為 **a** 與 **b** 線性無關（linearly independent），所以它們構成平面的一組基（basis）。這是大學第一個線性代數（linear algebra）課程的核心概念。簡潔的答案 $\lambda=\mu\nu$ 是一個比例結果，與塞瓦定理（Ceva's theorem）及梅涅勞斯定理（Menelaus' theorem）同屬一類，而這些定理用重心坐標（barycentric coordinates）表達最為簡潔。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對基與坐標有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。