詳細解答

STEP II 2018，第 6 題

純數學 • 階乘與質數

> **STEP II 2018，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q6

關鍵思路

兩部分都取決於同一個事實：質數（prime）p 整除（divides）$k!$ 當且僅當 $p \leq k$。在 (i) 中，一旦 $n \geq 5$，階乘（factorial）便是 5 的倍數，所以 $n! + 5$ 也是。在 (ii) 中，左方只由不超過 $2n-1$ 的數構成，因此任何大於 $2n-1$ 的質數都不能整除它。如果 $m!$ 大得足以包含這樣一個質數，方程便不成立。題中的兩個定理，作用正是令 m 足夠大，並提供那個質數。

解答

第 (i) 部分

當 $n \geq 5$ 時，5 是 $n!$ 的其中一個因數，所以 $5 \mid n!$，從而 $5 \mid n! + 5$。但 $n! + 5 > 5$，所以 $n! + 5$ 有一個嚴格介乎 1 與其本身之間的因數 5，因此不是質數。故此只需檢查 $n \leq 4$：

$$1! + 5 = 6, \qquad 2! + 5 = 7, \qquad 3! + 5 = 11, \qquad 4! + 5 = 29.$$

6 不是質數，其餘三個都是。解為

$$(n, p) = (2, 7),\ (3, 11),\ (4, 29).$$

第 (ii) 部分

記 $P_n = 1! \times 3! \times \cdots \times (2n-1)!$。這些階乘中的每一個因數，都是介乎 1 與 $2n-1$ 之間的整數。因此若質數 q 整除 P_n，由於 q 是質數，它必整除其中一個整數，所以 $q \leq 2n-1$。這就得出關鍵事實：

$$\text{沒有質數} q > 2n-1 \text{ 整除} P_n. \qquad (*)$$

另一方面，每個質數 $q \le m$ 都整除 $m!$。所以若 $P_n = m!$，則 m 小於每一個大於 $2n-1$ 的質數。

n 較大時。 假設 $n \ge 7$ 且 $P_n = m!$。由定理 1，$m! = P_n > (4n)!$，所以 $m > 4n$（階乘是遞增的）。由定理 2，存在質數 q 使得 $2n < q < 4n$。於是 $q < 4n < m$，所以 $q \mid m! = P_n$。但 $q > 2n > 2n-1$，這與 $(*)$ 矛盾（contradiction）。因此 $n \ge 7$ 時沒有解。

> **想一想** 為甚麼我們不能對所有 n 都直接引用這兩個定理？

定理 1 只聲稱對 $n \ge 7$ 成立，而事實上它在 $n = 6$ 時並不成立。所以 $n = 1, \ldots, 6$ 需要逐一親手檢查。我們再次利用 $(*)$ 來簡化計算。

n 較小時。

- $n = 1$：$P_1 = 1 = 1!$，所以 $m = 1$。
- $n = 2$：$P_2 = 1 \times 6 = 6 = 3!$，所以 $m = 3$。
- $n = 3$：$P_3 = 6 \times 120 = 720 = 6!$，所以 $m = 6$。
- $n = 4$：$P_4 = 720 \times 5040$。由於 $720 = 6!$ 且 $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$，得 $P_4 = 6! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 10!$，所以 $m = 10$。
- $n = 5$：$P_5 = P_4 \times 9! = 10! \times 9! > 10!$，所以 $m \ge 11$。於是質數 11 整除 $m!$，但 $11 > 9 = 2n-1$，與 $(*)$ 矛盾。無解。
- $n = 6$：$P_6 = 10! \times 9! \times 11! > 12!$（因為 $10! \times 9! > 12$），所以 $m \ge 13$。於是質數 13 整除 $m!$，但 $13 > 11 = 2n-1$，與 $(*)$ 矛盾。無解。

在每個有解的情況中，m 都是唯一的，因為正整數的階乘從 $2!$ 起嚴格遞增（而 $1! = 1 < 2!$）。所以解為

$$(n, m) = (1,1),\ (2,3),\ (3,6),\ (4,10).$$

驗算

恆等式 $1!\,3!\,5!\,7! = 10!$ 很容易驗證：兩邊都等於 3 628 800。以電腦在 $n \le 59$ 及 $m < 400$ 範圍內搜尋，恰好找到上述四組解，並確認 $n! + 5$ 只在 $n = 2, 3, 4$ 時是質數（搜尋範圍 $n \le 30$）。搜尋亦確認定理 1 在 $n = 6$ 時不成立，這正是為何確實需要親手檢查 $n = 5$ 和 $n = 6$。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分遺漏 $n = 1$：此時乘積只有單一因數 1!，所以 $(1,1)$ 是一個解。
- 對 $n = 5$ 或 $n = 6$ 使用定理 1。定理只對 $n \geq 7$ 陳述，所以這兩個情況需要各自的論證。
- 未檢查 $q \leq m$ 便聲稱「$q \mid m!$」。這正是我們需要由定理 1 得出 $m > 4n$ 的原因。

STEP 之外

定理 2 就是伯特蘭公設（Bertrand's postulate）：對每個 $n \geq 1$，都存在質數 p 使得 $n < p \leq 2n$。切比雪夫（Chebyshev）於 1852 年證明了它，後來艾狄胥（Erdős）利用中心二項式係數（central binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ 給出了一個優美的初等證明。像 $n! + 1 = m^2$ 這類方程（布羅卡問題，Brocard's problem）至今仍未解決。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是深入學習質數與階乘算術的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。