詳細解答

# STEP II 2018，第 5 題

純數學 • 級數的積分

> **STEP II 2018，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q5

## 關鍵思路

每一部分都是先把函數化成冪級數（power series），再逐項（term by term）積分。在 (i) 中，這只不過是對一個幾何級數（geometric series）積分。在 (ii) 中，把指數函數展開後，每一項都變成形如 $\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的積分，而這個積分是一個階乘（factorial）；階乘互相約去後，剩下的正好是 (i) 中的級數。至於 (iii)，分母中的 $\ln x$ 就是線索：代換（substitution）$x = \mathrm{e}^{-t}$ 會把它變成 $-t$，並把整個積分變成兩個 (ii) 中的積分。

## 解答

### 第 (i) 部分

當 $|x| < 1$ 時，二項式展開（binomial expansion）（即公比為 $-x$ 的幾何級數）為

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

將兩邊由 0 積分至 $x$。左邊，由於 $\ln 1 = 0$，所以 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(1+x)$。右邊逐項積分，得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (\text{將} n+1 \text{ 換成} n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n},\end{aligned}$$

這正是 $|x| < 1$ 時所要求的結果。

**第 (ii) 部分**

對所有 $x$，

$$\mathrm{e}^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax)^n}{n!} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots.$$

$n = 0$ 的一項是 1，所以

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-ax}}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n-1}}{n!}.$$

在這裏除以 $x$ 並無問題：餘下的每一項都含有因子 $x$，所以被積函數（integrand）在 $x = 0$ 處完全正常（它趨向 $a$）。乘以 $\mathrm{e}^{-x}$ 再逐項積分（題目說可以不理會收斂（convergence）問題），得

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} I_{n-1}, \qquad \text{其中} I_m = \int_0^{\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

**想一想** $I_m$ 是甚麼？

取 $u = x^m$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分（integration by parts）。當 $m \geq 1$ 時，

$$I_m = \Big[-x^m \mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{\infty} + m\int_0^{\infty} x^{m-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = mI_{m-1},$$

因為當 $x \to \infty$ 時 $x^m\mathrm{e}^{-x} \to 0$（指數函數佔上風），而在 $x = 0$ 處它等於 0。由於 $I_0 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$，可得 $I_m = m!$。

所以 $I_{n-1} = (n-1)!$，而 $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$。因此

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} = \ln(1+a),$$

這裏用了第 (i) 部分並取 $x = a$；由於 $|a| < 1$，這是容許的。這正是所要求的結果。

**第 (iii) 部分**

代入 $x = \mathrm{e}^{-t}$，使得 $\ln x = -t$ 及 $\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$。當 $x$ 由 0 變到 1 時，$t$ 由 $\infty$ 減至 0。此外 $x^p = \mathrm{e}^{-pt}$ 及 $x^q = \mathrm{e}^{-qt}$。因此

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{-pt} - \mathrm{e}^{-qt}}{-t}\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt}\right)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

其中兩個負號互相抵消，而對調上下限則令 $p$ 和 $q$ 互換。現在寫成 $\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt} = \left(1 - \mathrm{e}^{-pt}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-qt}\right)$，並把積分拆開。每一部分都是 (ii) 中的形式，分別取 $a = p$ 和 $a = q$，而兩者都滿足 $|a| < 1$。所以

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+p) - \ln(1+q) = \ln\left(\frac{1+p}{1+q}\right).$$

把積分拆開是合理的，因為兩個積分各自都收斂：由 (ii)，每一個都有有限的值。

## 驗算

- 若 $p = q$，被積函數為零，而 $\ln \frac{1+p}{1+p} = 0$ 亦確實如此。
- 互換 $p$ 和 $q$，被積函數和答案都會變號。
- 符號檢查：當 $0 < x < 1$ 時，$\ln x < 0$；若 $p < q$，則 $x^p > x^q$，所以被積函數為負，而 $\ln \frac{1+p}{1+q}$ 亦為負。
- 取 $p = \frac{1}{2}$、$q = 0$，答案為 $\ln \frac{3}{2} \approx 0.405465$。以數值方法計算 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ 得到相同的值；隨機在 $(-1,1)$ 中選取 $p$ 和 $q$，結果與公式吻合至小數點後六位。

## 常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{e}^{-ax}$ 中 $n = 0$ 的一項會與 1 抵消，結果試圖積分 $\mathrm{e}^{-x}/x$，而這個積分在 0 處發散。
- 在 (iii) 的代換中弄錯符號：要追蹤三個負號（分別來自 $\ln x$、$\mathrm{d}x$ 及對調上下限），弄錯其中一個就會得到 $\ln \frac{1+q}{1+p}$。
- 寫成 $I_{n-1} = n!$ 而不是 $(n-1)!$；這樣階乘就不再約成 $\frac{1}{n}$。

## STEP 之外

積分 $I_m = \int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m!$ 就是伽瑪函數（gamma function）$\Gamma(m+1)$，它把階乘推廣到非整數。(iii) 中的積分是「積分號下求導」（differentiating under the integral sign）的經典例子：對 $p$ 求導可以消去麻煩的 $\ln x$，只剩下 $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$。事實上，只要 $p, q > -1$，結果都成立。題目叫我們不必理會的「交換求和與積分次序」，在數學分析課程中是以一致收斂（uniform convergence）或控制收斂（dominated convergence）來證明其合理性的。如想了解這些步驟背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。