詳細解答

# STEP II 2018，第 4 題

純數學 • 三角方程

> **STEP II 2018，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q4

## 關鍵思路

題目給出的恆等式（identity）把餘弦之和化為乘積，而解一條等於零的方程時，我們正需要乘積。在 (i) 中，把頭尾兩項配對、中間兩項配對，立即得到一個公因子（common factor）。在 (ii) 和 (iii) 中，有用的做法是把一切以兩角的半和與半差表示；這樣一來，(ii) 可以因式分解（factorise），而 (iii) 則變成兩個平方之和等於零。

## 解答

### 第 (i) 部分

把第一項與最後一項配對，中間兩項配對。由恆等式，

$$\cos x + \cos 4x = 2\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{3x}{2},$$
$$3(\cos 2x + \cos 3x) = 6\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{x}{2}.$$

（由於餘弦是偶函數（even function），我們可寫 $\cos(-\frac{3x}{2}) = \cos\frac{3x}{2}$。）因此左邊為

$$2\cos\tfrac{5x}{2}\left(\cos\tfrac{3x}{2} + 3\cos\tfrac{x}{2}\right).$$

設 $c = \cos\frac{x}{2}$，由三倍角公式（triple-angle formula）$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 得 $\cos\frac{3x}{2} = 4c^3 - 3c$，所以括號內正好是 $4c^3$。因此方程為

$$8\cos\tfrac{5x}{2}\cos^3\tfrac{x}{2} = 0.$$

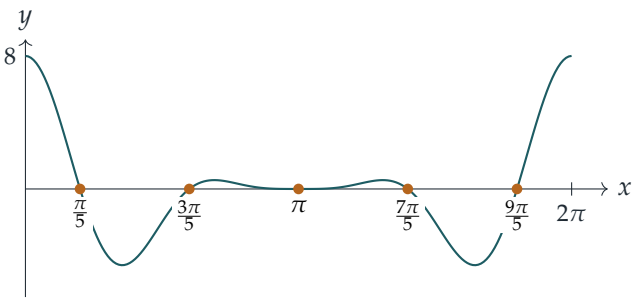
第一個因子。$\cos\frac{5x}{2} = 0$ 即 $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$，其中 $k$ 為整數，亦即 $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$。要 $0 \le x \le 2\pi$，須 $0 \le 2k+1 \le 10$，所以 $k = 0, 1, 2, 3, 4$。

第二個因子。$\cos\frac{x}{2} = 0$ 且 $0 \le \frac{x}{2} \le \pi$，只得 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$，即 $x = \pi$，而這已在上面的列表中。

因此解為

$$x = \frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

左邊的圖像顯示了這些解；在 $x = \pi$ 處，$\cos\frac{5x}{2}$ 和 $\cos^3\frac{x}{2}$ 同時為零，所以曲線在該處只是觸及橫軸，而不是穿過它。




**第 (ii) 部分**

對頭兩項使用恆等式，並利用 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$，

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) - \cos 2x = 2\cos x\cos y - 2\cos^2 x + 1.$$

令它等於 1，得

$$2\cos x\,(\cos y - \cos x) = 0,$$

所以 $\cos x = 0$ 或 $\cos y = \cos x$。

- 若 $\cos x = 0$ 且 $0 \le x \le \pi$，則 $x = \frac{\pi}{2}$（此時任何 $y$ 皆可）。
- 若 $\cos y = \cos x$，則 $x = y$，因為餘弦在 $[0, \pi]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），所以在該區間內每個值只取一次。

所以 $x = y$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$，得證。

**第 (iii) 部分**

設 $s = \frac{1}{2}(x+y)$ 及 $d = \frac{1}{2}(x-y)$。由恆等式得 $\cos x + \cos y = 2\cos s\cos d$，而 $\cos(x+y) = \cos 2s = 2\cos^2 s - 1$。方程變為

$$2\cos s\cos d - 2\cos^2 s + 1 = \tfrac{3}{2} \iff 4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + 1 = 0.$$

? **想一想** 一條方程，兩個未知數：它怎能同時確定 $x$ 和 $y$？

對 $\cos s$ 配方（complete the square）。由於 $1 = \cos^2 d + \sin^2 d$，

$$4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + \cos^2 d + \sin^2 d = (2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d = 0.$$

兩個實數的平方之和為零，當且僅當兩者皆為零，於是得到兩條方程：

$$\sin d = 0 \qquad 及 \qquad 2\cos s = \cos d.$$

由於 $x, y \in [0, \pi]$，有 $-\frac{\pi}{2} \le d \le \frac{\pi}{2}$，而 sin 在此區間內唯一的零點是 $d = 0$。所以 $x = y$，於是 $s = x$ 且 $\cos d = 1$，得 $\cos x = \frac{1}{2}$。由 $0 \le x \le \pi$，即 $x = \frac{\pi}{3}$。

所以唯一的解是

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

確實，$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$。

同樣的代數運算還說明了更多：對所有 $x$、$y$，

$$\tfrac{3}{2} - \big(\cos x + \cos y - \cos(x+y)\big) = \tfrac{1}{2}\big[(2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d\big] \ge 0,$$

所以 $\frac{3}{2}$ 是左邊所能取的最大值，而這條方程問的正是此最大值在何處取得。

## 驗算

- 在 (i) 中，當 $x = \frac{\pi}{5}$：由於 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$，有 $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$ 及 $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0$。當 $x = 0$，左邊為 $1+3+3+1 = 8$，與 $8\cos 0\cos^3 0$ 吻合。
- 用電腦在 $[0, 2\pi]$ 上以細密網格搜尋，恰好找到上述五個零點；在 $[0, \pi]^2$ 上以網格搜尋，找到 $\cos x + \cos y - \cos(x+y)$ 的最大值為 1.5，且只在 $x = y \approx 1.0472 = \frac{\pi}{3}$ 處取得。
- 在 (ii) 中，$x = \frac{\pi}{2}$ 對每個 $y$ 都給出 $\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos(\frac{\pi}{2} - y) - \cos\pi = -\sin y + \sin y + 1 = 1$。

## 常見錯誤

- 把 $x = \pi$ 列了兩次，或者漏掉了它：在 (i) 中它來自兩個因子，但只算一個解。
- 在 (ii) 中，除以 $\cos x$，因而失去 $x = \frac{\pi}{2}$。
- 在 (iii) 中，停在關於 $\cos s$ 的二次方程，而沒有利用判別式（discriminant）（或平方和）迫使 $\cos^2 d = 1$。

## STEP 之外

(i) 中的係數 $1,3,3,1$ 並非巧合：左邊是 $e^{ix}(1+e^{ix})^3$ 的實部（real part），而由於 $1+e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\,e^{ix/2}$，一行便得到 $8\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$。第 (iii) 部分其實是經典不等式（inequality）$\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$ 的變裝版本，其中 $A$、$B$、$C$ 為三角形的三個角（令 $A=x$、$B=y$、$C=\pi-x-y$），等號只在等邊三角形（equilateral triangle）時成立；像這樣求二元函數的最大值，是大學一年級多變量微積分（multivariable calculus）的標準課題。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）展示了複指數如何令這類三角恆等式幾乎變得自動成立。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。