詳細解答

STEP II 2018，第 3 題

純數學 • 旋轉對稱與積分

> **STEP II 2018，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q3

關鍵思路

繞點 (a,b) 作半周旋轉（half-turn），會把 (x,y) 映到 $(2a-x,\,2b-y)$。因此，具有這種對稱性的曲線會把每個 x 值與其反射值 $2a-x$ 配對，並使兩個對應的高度之和為 $2b$。對正切函數而言，最自然的配對是 $x \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - x$，因為 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = 1/\tan x$。單憑這一條恆等式，就能得出曲線的對稱性；之後，對於關於中心對稱的區間上的積分，根本不用真正積分也能求出結果。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = (1+\tan x)^{-1}$，利用鏈式法則（chain rule），

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x} = -\frac{1}{1+\sin 2x}, \end{aligned}$$

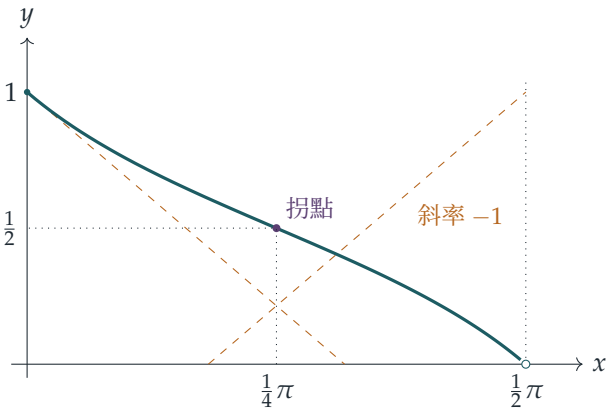
即為所求。（把 $1+\tan x$ 乘以 $\cos x$，正是令整個式子變得簡潔的一步。）

至於值域（range），由 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 得 $0 \le 2x < \pi$，所以 $\sin 2x$ 取遍 $[0,1]$ 內的每個值：在 $x=0$ 時取值 0，在 $x=\frac{1}{4}\pi$ 時取值 1。因此 $1 \le 1+\sin 2x \le 2$。取倒數（由於各項皆為正數，不等號方向會反轉），再取負號，得

$$-1 \le f'(x) \le -\tfrac{1}{2}.$$

兩個端點都能取到：$f'(0) = -1$ 及 $f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$。

關於草圖：$f(0)=1$，$f(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}$，而由於 $\tan x\to\infty$，當 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 時 $f(x)\to 0$。曲線處處遞減，斜率介乎 -1 與 $-\frac{1}{2}$ 之間。曲線在 $x=0$ 處最陡（斜率 -1），在 $x=\frac{1}{4}\pi$ 處最平緩，而當 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 時又再變陡，斜率趨向 -1。所以 f' 在 $\frac{1}{4}\pi$ 處取得極大值，該點是一個拐點（point of inflection）：曲線在 $[0,\frac{1}{4}\pi)$ 上向上凹（concave up），在 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上向下凹（concave down）。（事實上 $f''(x)=2\cos 2x/(1+\sin 2x)^2$，它在 $\frac{1}{4}\pi$ 處變號。）



兩條虛線的斜率均為 -1：一條是曲線在 $(0,1)$ 處的切線，另一條是當 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 時曲線趨近的方向。曲線看來在繞 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2})$ 作半周旋轉下是對稱的，而這正是本題餘下部分的主題。

第 (ii) 部分

繞 (a,b) 旋轉 π 會把 (x,y) 映到 $(2a-x,\,2b-y)$，因為 (a,b) 是一點與其像的中點。曲線關於 (a,b) 具有二階旋轉對稱（rotational symmetry of order 2），當且僅當這個旋轉把曲線映成它自己。（要做到這一點，定義域（domain）必須關於 $x=a$ 對稱，使得只要 x 在定義域內，$2a-x$ 亦在定義域內。）

（$\Rightarrow$）假設曲線具有這種對稱性。對定義域內任意 x，點 $(x,g(x))$ 在曲線上，所以其像 $(2a-x,\,2b-g(x))$ 亦在曲線上。由於曲線是函數的圖像，曲線上 x 坐標為 $2a-x$ 的點只有 $(2a-x,\,g(2a-x))$。所以 $g(2a-x)=2b-g(x)$，即

$$g(x)+g(2a-x)=2b.$$

（$\Leftarrow$）假設對定義域內每個 x 都有 $g(x)+g(2a-x)=2b$。曲線上一般點 $(x,g(x))$ 的像是

$$(2a-x,\,2b-g(x))=(2a-x,\,g(2a-x)),$$

它在曲線上。所以這個旋轉把曲線映入其自身；又由於旋轉兩次即得恆等變換，它把曲線映成其自身。在恆等式中代入 $x=a$，得 $g(a)=b$，與 (a,b) 在曲線上一致。

至於積分，關於原點對稱即 $a = b = 0$，所以 $g(-x) = -g(x)$：g 是奇函數（odd function）。在左半部分作代換（substitution）$x = -u$，

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} g(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

所以兩半互相抵消，得

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

第 (iii) 部分

設 $h(x) = \dfrac{1}{1+\tan^k x}$，其中 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$。參考 (i) 的草圖，嘗試取 $a = \frac{1}{4}\pi$、$b = \frac{1}{2}$。定義域 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 關於 $\frac{1}{4}\pi$ 對稱，且 $2a - x = \frac{1}{2}\pi - x$。

想一想 怎樣化簡 $h(\frac{1}{2}\pi - x)$？

利用 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \cot x = 1/\tan x$，此式在 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時成立，而此時 $\tan x > 0$。於是，分子分母同乘以 $\tan^k x$，

$$h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1}{1+\tan^{-k} x} = \frac{\tan^k x}{\tan^k x + 1},$$

所以

$$h(x) + h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1+\tan^k x}{1+\tan^k x} = 1 = 2\cdot\tfrac{1}{2}.$$

由於 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ 給出 $h(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$，點 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ 在曲線上。由 (ii)，無論正常數 k 取何值，曲線都關於 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ 具有二階旋轉對稱。

至於積分，設 $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)\,\mathrm{d}x$。區間 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 關於 $\frac{1}{4}\pi$ 對稱，所以代換 $x = \frac{1}{2}\pi - u$ 把它映成其自身（兩端互換，正好抵消 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ 帶來的負號）：

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} h(\tfrac{1}{2}\pi - u)\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \big(1 - h(u)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) - I. \end{aligned}$$

因此 $2I = \frac{1}{6}\pi$，而

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\tan^k x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}.$$

從幾何角度看，在矩形 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi] \times [0,1]$ 內，半周旋轉把曲線下方的區域與曲線上方的區域互換，所以面積是矩形面積的一半，即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi$。這正是把 (ii) 的論證中的 g 換成 $h - \frac{1}{2}$。

驗算

- 取 $k = 1$ 及 $x = \frac{1}{6}\pi$：$h = 1/(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \approx 0.634$；取 $x = \frac{1}{3}\pi$：$h = 1/(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0.366$。兩者之和為 1，與對稱性所言相符。
- 答案與 k 無關。當 $k \to \infty$ 時，h 在 $x < \frac{1}{4}\pi$ 時接近 1，在 $x > \frac{1}{4}\pi$ 時接近 0，所以積分趨向區間 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 的長度，即 $\frac{1}{12}\pi$，結果一致。
- 對 $k = 0.3$、1、2、3.7 及 10 作數值積分，每次都得 0.2617994，與 $\pi/12 \approx 0.2617994$ 吻合。

常見錯誤

- 在 (i) 中把值域寫成 $-1 < f'(x) \leq -\frac{1}{2}$：值 -1 在 $x = 0$ 處取到，而 $x = 0$ 在定義域內。
- 在 (ii) 中只證明一個方向。「當且僅當」需要同時證明對稱性 $\Rightarrow$ 恆等式，以及恆等式 $\Rightarrow$ 對稱性。
- 在 (iii) 中嘗試直接積分 $1/(1 + \tan^k x)$。對一般的 k，根本找不到初等原函數（elementary antiderivative），而對稱性才是整道題的關鍵。

STEP 之外

(iii) 中的技巧，即作代換 $x \mapsto a + b - x$ 後把積分與自身相加，常被稱為「King 法則」（King's rule）。它是利用定義域的對稱性來簡化積分的一個特例；這個想法在羣論（group theory）和物理學中佔有核心地位，因為問題的對稱性可以預言哪些積分為零（如 (ii)），或取簡單的值。同樣的推理可求得對每個 $k > 0$ 都有 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^k x} = \frac{1}{4}\pi$。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多可以用這類對稱論證解決的積分。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。