詳細解答

STEP II 2018，第 2 題

純數學 • 凹函數

> **STEP II 2018，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q2

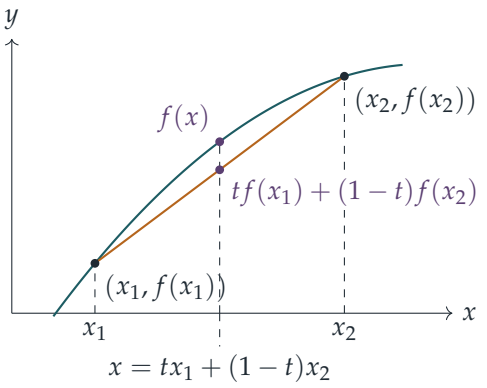
關鍵思路

當 t 由 0 變到 1 時，點 $tx_1 + (1-t)x_2$ 由 x_2 移到 x_1，而 $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ 就是弦（chord）在該點上方的高度。所以凹性（concavity）的意思是：每一條弦都位於曲線之上或之下——準確來說，在曲線上或曲線下方。掌握了這條兩點不等式之後，只要用兩次就得到三點的版本；再把它應用於適當的凹函數（concave function），並利用 $A + B + C = \pi$，兩條三角形不等式便隨之而來。

解答

示意圖

設 $x = tx_1 + (1-t)x_2$。那麼點 $(x,\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$ 把由 $(x_2, f(x_2))$ 到 $(x_1, f(x_1))$ 的弦按 $(1-t) : t$ 的比分割，所以它位於弦上、正好在 x 的正上方（或正下方）。定義所說的是：曲線在 x 處的高度至少與弦一樣高。



為何 $f'' < 0$ 推出凹性

若 $x_1 = x_2$，或 $t = 0$ 或 $t = 1$，不等式取等號，所以可設 $0 < t < 1$，並不失一般性（without loss of generality）設 $x_1 < x_2$（對調 x_1, x_2 只不過是對調 t 與 $1 - t$）。於是 $x = tx_1 + (1-t)x_2$ 滿足 $x_1 < x < x_2$，且

$$x - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1), \qquad x_2 - x = t(x_2 - x_1).$$

由中值定理（mean value theorem），存在 $c_1 \in (x_1, x)$ 及 $c_2 \in (x, x_2)$，使得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

由於在 (a, b) 上 $f'' < 0$，f' 在該區間上嚴格遞減（strictly decreasing），而 $c_1 < c_2$，所以 $f'(c_1) > f'(c_2)$。代入上面的長度，並約去正因子 $x_2 - x_1$，得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-t} > \frac{f(x_2) - f(x)}{t}.$$

兩邊乘以 $t(1-t) > 0$，得 $tf(x) - tf(x_1) > (1-t)f(x_2) - (1-t)f(x)$，即

$$f(x) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

所以 f 在 (a, b) 上是凹函數。用文字來說：曲線的斜率不斷下降，所以由 x_1 到 x 的斜率大於由 x 到 x_2 的斜率，曲線便向上鼓起，高於弦。

第 (i) 部分

想一想 哪兩個點、用甚麼權重，加權平均後會得到 $\frac{1}{3}(u + v + w)$？

把 v 和 w 歸為一組：取 $x_1 = u$、$x_2 = \frac{1}{2}(v + w)$ 及 $t = \frac{1}{3}$。由於 x_2 介於 v 與 w 之間，它位於 (a, b) 內，而且

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(v + w) = \tfrac{1}{3}(u + v + w).$$

由定義得

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}f\Big(\frac{v+w}{2}\Big).$$

現在再用一次定義，取 $x_1 = v$、$x_2 = w$、$t = \frac{1}{2}$：$f(\frac{1}{2}(v+w)) \geq \frac{1}{2}f(v) + \frac{1}{2}f(w)$。由於這一項的係數 $\frac{2}{3}$ 是正數，代入後不等號的方向不變：

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(f(v)+f(w)) = \frac{f(u)+f(v)+f(w)}{3},$$

這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

在 $0 < x < \pi$ 上取 $f(x) = \sin x$。此時 $f''(x) = -\sin x < 0$，所以 sin 在 $(0,\pi)$ 上是凹函數。三角形的內角滿足 $0 < A, B, C < \pi$ 及 $A + B + C = \pi$，因此在第 (i) 部分中取 $u = A$、$v = B$、$w = C$，得

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

第 (iii) 部分

當 $0 < x < \pi$ 時 $\sin x > 0$，所以 $g(x) = \ln(\sin x)$ 在該區間上有定義，且

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \qquad g''(x) = -\operatorname{cosec}^2 x < 0.$$

所以 g 在 $(0,\pi)$ 上是凹函數，由第 (i) 部分得

$$\frac{\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C}{3} \leq \ln\sin\frac{\pi}{3} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

兩邊乘以 3 並合併對數，得 $\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^3$。由於 exp 是遞增函數，

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

驗算

兩個上界都由等邊三角形（equilateral triangle）取到：$3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$，以及 $\sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.6495$。等腰直角三角形給出的和是 $1+\sqrt{2} \approx 2.414$，積是 $\frac{1}{2}$，兩者都低於上界。用電腦檢驗 200 000 個隨機三角形，沒有一個的和超過 2.598076，也沒有一個的積超過 0.649519。非常扁平的三角形（$A, B \to 0$，$C \to \pi$）會令兩者都趨向 0，正如預期。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，若取 $t = \frac{1}{3}$、$x_1 = u$、$x_2 = v$，得到的是 $\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v$，並非三個數的平均值；第二個點必須是 v 與 w 的中點。
- 在第 (iii) 部分，不能直接把第 (ii) 部分的不等式套用到乘積上；要靠對數把乘積化為和。另外也要檢查 $\ln \sin x$ 有定義，這需要 $\sin x > 0$。
- 只說 $f'' < 0$「意味着曲線向下彎」，本身並不構成弦不等式的證明；中值定理的論證才令它變得嚴謹。

STEP 之外

第 (i) 部分是琴生不等式（Jensen's inequality）的三點情況：對凹函數 f 及總和為 1 的權重 $t_i \geq 0$，有 $f\left(\sum t_i x_i\right) \geq \sum t_i f(x_i)$，其證明正是用歸納法（induction），做法與這裏完全一樣。取 $f = \ln$，便得到算術－幾何平均不等式（AM–GM inequality）；在概率論中，它說的是對凹函數 f，有 $f(\mathrm{E}[X]) \geq \mathrm{E}[f(X)]$。凸函數（convex function）與凹函數，以及第二段背後的中值定理，在 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）中有詳細而嚴謹的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。