詳細解答

STEP II 2018，第 13 題

概率與統計 • 遞推關係

STEP II 2018，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

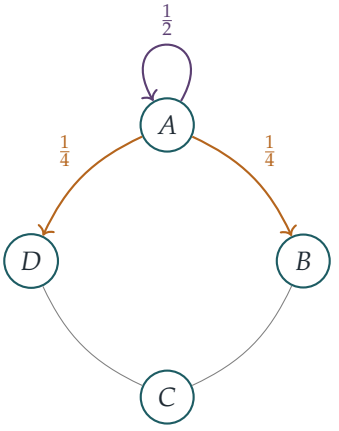
step.maths.org/questions/18-s2-q13

關鍵思路

無論包裹在誰手上，下一下哨聲都按固定規則移動它，因此 A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1} 每一個都是 A_n、B_n、C_n、D_n 的固定組合。四條互相耦合的遞推關係（recurrence）看似令人生畏，但選對組合（相對兩個小孩的和與差），每個組合都各自滿足一條只有一行的遞推關係，而這些我們可以即時解出。

解答

為圍成一圈的小孩標上名字。每次吹哨時，持有包裹的人以概率 $\frac{1}{2}$ 保留包裹，並以概率 $\frac{1}{4}$ 傳給每一位相鄰的小孩；注意，按題目的設定，順時針與逆時針傳遞的可能性相同。



圖中顯示由 A 出發的各種移動；每個小孩處的模式都一樣。

第 (i) 部分

由 A 開始，吹哨一次後

$$A_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad B_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad C_1 = 0, \qquad D_1 = \tfrac{1}{4},$$

因為 C 與 A 相隔兩個位置，一步之內無法到達。

要在第二次吹哨後落在某個小孩手上，包裹要麼本來已在那裏而且留下（概率 $\frac{1}{2}$），要麼在相鄰的小孩手上並被傳向正確方向（每個相鄰小孩各貢獻概率 $\frac{1}{4}$）。所以

$$\begin{aligned} A_2 &= \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{8}, \\ B_2 &= \tfrac{1}{2}B_1 + \tfrac{1}{4}A_1 + \tfrac{1}{4}C_1 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + 0 = \tfrac{1}{4}, \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = 0 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{8}, \\ D_2 &= \tfrac{1}{2}D_1 + \tfrac{1}{4}C_1 + \tfrac{1}{4}A_1 = \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

驗算一下，$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1$。

第 (ii) 部分

用於 $n = 2$ 的論證對每個 $n \geq 0$ 都成立，依據是全概率定律（law of total probability）（以第 n 次吹哨後誰持有包裹作為條件）：

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \tfrac{1}{2}A_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & B_{n+1} &= \tfrac{1}{2}B_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \\ C_{n+1} &= \tfrac{1}{2}C_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & D_{n+1} &= \tfrac{1}{2}D_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \end{aligned}$$

其中 $A_0 = 1$ 及 $B_0 = C_0 = D_0 = 0$。

求 B_n 和 D_n。 把 B_{n+1} 與 D_{n+1} 的方程相加，

$$B_{n+1} + D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n + D_n) + \tfrac{1}{2}(A_n + C_n) = \tfrac{1}{2}(A_n + B_n + C_n + D_n) = \tfrac{1}{2},$$

因為包裹總在某人手上，所以四個概率之和為 1。

? **想一想** 現在已知 $B + D$ 之和，但要怎樣把它分配給 B 和 D？

改為相減而非相加：$A_n + C_n$ 項互相抵消，剩下

$$B_{n+1} - D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n - D_n).$$

由於 $B_0 - D_0 = 0$，可得對每個 n 都有 $B_n - D_n = 0$。（這正是遊戲的鏡像對稱：順時針與逆時針傳遞的可能性相同，而 B 和 D 對稱地位於 A 的兩側。）結合 $B_n + D_n = \frac{1}{2}$，

$$B_n = D_n = \tfrac{1}{4} \qquad \text{對所有} n \geq 1,$$

當然 $B_0 = D_0 = 0$。這與第 (i) 部分吻合。

求 A_n 和 C_n。 對 $n \geq 1$，我們現已知道 $A_n + C_n = 1 - (B_n + D_n) = \frac{1}{2}$。把 A_{n+1} 與 C_{n+1} 的方程相減，$B_n + D_n$ 項互相抵消：

$$A_{n+1} - C_{n+1} = \tfrac{1}{2}(A_n - C_n),$$

而此式對所有 $n \geq 0$ 成立。由於 $A_0 - C_0 = 1$，得對所有 $n \geq 0$ 有 $A_n - C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$。與 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ 聯立求解：

$$\boxed{A_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad C_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1).}$$

這些公式在 $n = 0$ 時不成立（會得出 $A_0 = \frac{3}{4}$），因為關係式 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ 要在第一次吹哨之後才開始成立。

驗算

- $n = 1$：$A_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 及 $C_1 = 0$；$n = 2$：$A_2 = \frac{3}{8}$ 及 $C_2 = \frac{1}{8}$。兩者都與第 (i) 部分吻合。
- $n = 3$：公式給出 $(A_3, B_3, C_3, D_3) = (\frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4})$，其和為 1，並與直接按遞推關係逐步計算的結果一致；以電腦模擬 200 000 局遊戲，得出 $A_3 \approx 0.313$ 及 $C_3 \approx 0.188$。
- 當 $n \to \infty$ 時，每個概率都趨向 $\frac{1}{4}$：吹哨多次之後，包裹在任何位置的可能性都相同，正如對稱性所暗示。

常見錯誤

- 用從 B 傳出的概率來寫 B_{n+1}，而不是用傳入 B 的概率。應該問：「包裹在上一刻可能在哪裏？」
- 聲稱 $A_n = \frac{1}{4} + 2^{-(n+1)}$ 對所有 $n \geq 0$ 成立；它在 $n = 0$ 時是錯的。
- 「憑對稱性」假設 $B_n = D_n$ 而不給出任何理由；差的遞推關係能令這一點變得嚴謹。

STEP 之外

這是一條馬可夫鏈（Markov chain）：一個在四個狀態組成的環上進行的隨機遊走（random walk），轉移矩陣（transition matrix）為 P，而 $(A_n, B_n, C_n, D_n) = (1, 0, 0, 0)P^n$。組合 $B_n - D_n$、$A_n - C_n$ 及 $A_n + C_n - B_n - D_n$ 來自 P 的特徵向量（eigenvectors）（對應的特徵值（eigenvalues）為 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$ 及 0），而以 2^{-n} 的速率收斂（convergence）至均勻分佈（uniform distribution），是由第二大的特徵值所決定的。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對馬可夫鏈及其長期行為有淺白易明的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。