詳細解答

STEP II 2018，第 11 題

力學 • 摩擦力與力矩

> **STEP II 2018，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q11

關鍵思路

三條方程正好確定三個未知的接觸力：水平方向的牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）、豎直方向沒有加速度（acceleration），以及題目給定的條件——對質心（centre of mass）的力矩（moment）互相平衡。只要把兩個法向反作用力（normal reaction）都用加速度 a 表示，兩種失效情況便各自變成 a 的一個臨界值。前輪在其反作用力降至零時離地；後輪在所需的摩擦力（friction）超過其反作用力的 μ 倍時打滑。哪個臨界值較低，哪種情況便先發生。

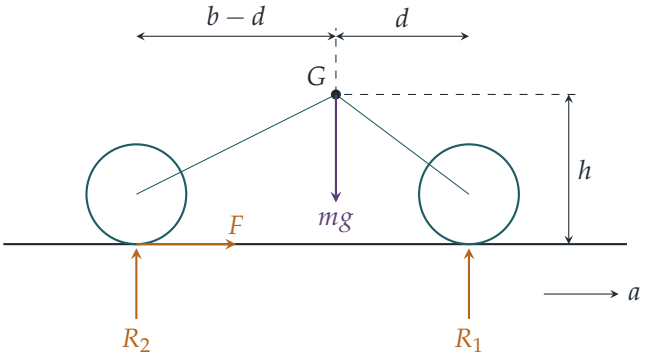
解答

模型與受力

把電單車視為沿直線運動的剛體（rigid body），向右的加速度為 $a \geq 0$。路面水平，所以質心 G 沒有豎直方向的加速度，而車身亦不轉動。所受的力為：

- 重力 mg，於 G 處向下作用；
- 前輪的法向反作用力 R_1（前輪光滑，所以該處沒有摩擦力）；
- 後輪的法向反作用力 R_2 及摩擦力 F。引擎驅動後輪，所以 F 向前作用，而且是唯一的水平力。

前輪接觸點在 G 前方水平距離 d 處，後輪接觸點則在 G 後方 $b - d$ 處。兩者都在 G 下方距離 h 處。



以 a 表示反作用力

水平及豎直方向分別有

$$F = ma, \qquad R_1 + R_2 = mg.$$

現在對 G 取力矩，以逆時針為正（即會令前輪抬起的方向）。重力對 G 沒有力矩。R_1 在 G 前方距離 d 處向上作用，產生逆時針力矩 $R_1 d$。R_2 在 G 後方距離 $b - d$ 處向上作用，產生順時針力矩 $R_2(b - d)$。而 F 沿 G 下方距離 h 的直線向前作用，所以產生逆時針力矩 Fh。令總力矩為零：

$$R_1 d + Fh = R_2(b - d).$$

代入 $F = ma$ 及 $R_1 = mg - R_2$：

$$mgd - R_2 d + mah = R_2(b - d) \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \frac{m(gd + ah)}{b},$$

於是

$$R_1 = mg - R_2 = \frac{m\big((b - d)g - ah\big)}{b}.$$

隨着 a 增大，重量由前輪轉移到後輪：R_1 減小，R_2 增大。

兩種失效各在何時發生？

前輪。只要 $R_1 \geq 0$，前輪便保持貼地，即

$$a \leq \frac{(b - d)g}{h} =: a_{\text{離地}}.$$

後輪。只要 $F \leq \mu R_2$，後輪便不會打滑，即

$$ma \leq \frac{\mu m(gd + ah)}{b} \iff a(b - \mu h) \leq \mu dg.$$

? **想一想** 為甚麼我們可以除以 $b - \mu h$ 而不必把不等式（inequality）反向？

這正是給定條件 $\mu < b/h$ 的用途：它表示 $b - \mu h > 0$。因此後輪在以下情況下保持抓地：

$$a \le \frac{\mu d g}{b - \mu h} =: a_{\text{打滑}}.$$

（若沒有這個條件，可提供的摩擦力的增長速度至少與所需摩擦力一樣快，後輪便永遠不會打滑。）

兩個臨界值都是正數，而當 a 由零開始增大時，後輪先打滑當且僅當 $a_{\text{打滑}} < a_{\text{離地}}$。由於 $b - \mu h > 0$ 且 $h > 0$，我們可以交叉相乘：

$$\begin{aligned}
\frac{\mu d g}{b - \mu h} < \frac{(b-d)g}{h} &\iff \mu d h < (b-d)(b - \mu h) \\
&\iff \mu d h + \mu h(b-d) < b(b-d) \\
&\iff \mu h b < b(b-d) \\
&\iff \mu < \frac{b-d}{h},
\end{aligned}$$

最後一步除以 $bh > 0$。所以若 $(*)$ 成立，後輪會在前輪離地之前打滑，此即所求。（事實上，這串推導顯示兩個命題是等價的。）

$(*)$ 成立時的最大加速度

若 $(*)$ 成立，則 $a_{\text{打滑}} < a_{\text{離地}}$。任何不超過 $a_{\text{打滑}}$ 的加速度都同時滿足兩個條件，所以前輪貼地而後輪抓地。任何更大的加速度都需要 $F > \mu R_2$。因此不打滑時的最大加速度為

$$a_{\max} = \frac{\mu d g}{b - \mu h},$$

此即所求。

$(*)$ 不成立時

此時 $\mu \ge \dfrac{b-d}{h}$，所以同一串等價推導（把 $<$ 換成 $\ge$）給出 $a_{\text{離地}} \le a_{\text{打滑}}$。因此每個不超過 $a_{\text{離地}}$ 的加速度都令 $R_1 \ge 0$，同時亦滿足 $a \le a_{\text{打滑}}$，所以後輪不會打滑。超過 $a_{\text{離地}}$ 便需要 $R_1 < 0$，而只要前輪接觸路面，這是不可能的。所以前輪保持接觸時的最大加速度為

$$a_{\max} = \frac{(b-d)g}{h}.$$

在這個加速度下 $R_1 = 0$：電單車正處於翹頭（wheelie）的臨界狀態，全部重量都落在後輪上。

驗算

- 當 $a = 0$：$R_2 = mgd/b$ 及 $R_1 = mg(b-d)/b$，正是按槓桿原理（lever rule）得出的一般靜態分配。較接近 G 的車輪承受較多重量。
- 在邊界情況 $\mu = (b-d)/h$ 下，有 $b - \mu h = d$，所以 $a_{\text{打滑}} = \mu g = (b-d)g/h = a_{\text{離地}}$。兩個答案一致，理應如此。
- 數值例子：$b = 1.5\,\text{m}$，$d = 0.75\,\text{m}$，$h = 0.6\,\text{m}$，$\mu = 0.8$，$g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$。此時 $(b-d)/h = 1.25 > \mu$，而 $a_{\text{打滑}} = 5.88/1.02 \approx 5.76\,\text{m s}^{-2}$，遠低於 $a_{\text{離地}} = 12.25\,\text{m s}^{-2}$。用電腦對大量隨機設定的電單車進行檢驗，逐步增大 a 並記錄哪個條件先失效，結果與兩條公式都吻合。

常見錯誤

- 把摩擦力力矩的正負號弄錯。在 G 下方向前的摩擦力傾向令前輪抬起，這正是加速會令前輪減載的原因。
- 除以 $b - \mu h$ 卻沒有說明它為何是正數。這正是條件 $\mu < b/h$ 唯一的作用。
- 對接觸點取力矩並令總力矩為零。電單車正在加速，所以力矩只在對 G 時平衡，對其他點則不然。

STEP 之外

題目給定的力矩條件，是剛體定律的一個特例：對質心的角動量（angular momentum）變化率等於對質心的總轉矩（torque）。這裏角動量為零，因為電單車不轉動。若對任何其他點取力矩，加速中的物體會由 ma 額外產生一個「虛擬」（fictitious）轉矩，這便解釋了最後一個常見錯誤。同樣的重量轉移分析，也是車輛動力學（vehicle dynamics）中剎車與牽引極限的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體動力學有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。