詳細解答

STEP II 2018，第 10 題

力學 • 伸長繩上的運動學

STEP II 2018，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

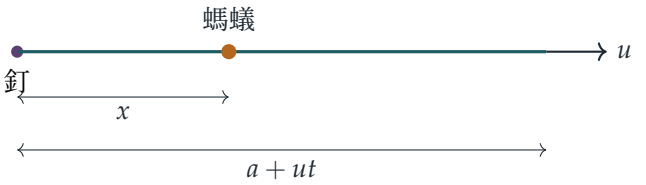
step.maths.org/questions/18-s2-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 11.12 節橡皮繩上的螞蟻中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/rubber-rope.html

關鍵思路

由於繩子是均勻（uniform）的，它在每一處都以相同的倍數拉長，所以繩上每一點沿繩的比例位置保持不變。因此，繩上一點的速率與它跟釘的距離成正比。這樣，螞蟻的方程便是線性（linear）的，而最自然要追蹤的量是螞蟻沿繩所處的比例位置 $x/(a+ut)$，而不是 x 本身。

解答



繩上一點的速率

在時間 t，自由端與釘的距離為 $a+ut$，這也就是繩子的長度。繩子是均勻的，所以整條繩都以相同的倍數 $(a+ut)/a$ 被拉長。因此，在 $t=0$ 時與釘相距 x_0 的繩上一點，始終位於沿繩相同的比例位置 x_0/a：

$$x = \frac{x_0}{a}(a+ut).$$

固定 x_0 求導，得其速率為 $\dfrac{x_0 u}{a}$；以該點目前的位置 x 表示，

$$\text{點的速率，其中該點與釘相距} x = \frac{ux}{a+ut}.$$

作為驗證，此速率在釘處為 0，在自由端為 u。

螞蟻的方程

螞蟻相對於釘的速率，等於 v 加上牠腳下繩子的速率，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

利用商法則（quotient rule），再代入這條方程，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) &= \frac{1}{a+ut}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{ux}{(a+ut)^2} \\ &= \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut},\end{aligned}$$

此即所求。

到達末端所需的時間

由 0 積分至 t，並利用 $t = 0$ 時 $x = 0$：

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v}{a+us}\,\mathrm{d}s = \frac{v}{u}\ln\left(\frac{a+ut}{a}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{ut}{a}\right).$$

左邊是螞蟻已走過的繩長比例，當它等於 1 時，螞蟻便到達末端。右邊由 0 開始持續遞增且無上界，所以這情況恰好發生一次，發生於時間 T，其中

$$\ln\left(1+\frac{uT}{a}\right) = k \iff 1+\frac{uT}{a} = \mathrm{e}^k \iff uT = a(\mathrm{e}^k - 1),$$

這正是題目給出的結果。

回程

現在螞蟻朝釘的方向走，所以牠自身沿繩的速度為 $-v$，於是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v + \frac{ux}{a+ut}.$$

想一想 我們需要重做一次商法則的計算嗎？

不需要：上面的推導除了 v 的正負號外完全不變，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}.$$

回程始於 $t = T$，此時螞蟻在繩的末端，即 $x/(a+ut) = 1$。由 T 積分至 t，

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{a+ut}{a+uT}\right).$$

當這個比例為 0 時，螞蟻便到達釘處；這首先發生於時間 t_1，其中

$$\ln\left(\frac{a+ut_1}{a+uT}\right) = k \iff a+ut_1 = (a+uT)\,\mathrm{e}^k.$$

所以回程需時

$$t_1 - T = \frac{(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)}{u}.$$

由去程可知 $\mathrm{e}^k - 1 = uT/a$ 及 $a+uT = a\mathrm{e}^k$，所以

$$t_1 - T = \frac{a\mathrm{e}^k}{u}\cdot\frac{uT}{a} = T\mathrm{e}^k.$$

回程需時 $T\mathrm{e}^k$，比去程長 e^k 倍。

驗算

- 若 $u \to 0$，繩子不會拉長：$k \to 0$，而 $T = a(\mathrm{e}^k-1)/u \to a/v$，同時回程時間 $T\mathrm{e}^k \to a/v$ 亦然，正合預期。
- 回程時間較長，這是合理的：回程時，螞蟻腳下的繩子會把牠帶離釘。
- 對隨機選取的 a、u 和 v 值（例如 $a=1$、$u=v$，因此 $k=1$ 及 $T = \mathrm{e}-1 \approx 1.718$），以數值方法逐步推進兩條微分方程（differential equation），結果顯示螞蟻在時間 T 到達末端，再經過 $T\mathrm{e} \approx 4.67$ 後回到釘處，與公式吻合。

常見錯誤

- 以為繩上每一點都以速率 u 移動；其實只有自由端是這樣。
- 忘記回程始於 $t = T$ 而非 $t = 0$，因此積分常數（constant of integration）會改變。
- 題目要求只以 T 和 k 表示答案，卻把答案停留在 $(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)/u$。

STEP 之外

無論繩子拉長得多快，螞蟻總會到達末端，因為 $\int \mathrm{d}t/(a+ut)$ 發散（diverges）。螞蟻已走過的距離佔繩長的比例，隨時間的對數（logarithm）增長；倘若拉長得更快（例如以指數方式），該積分便會收斂（converge），螞蟻就可能永遠到不了。同樣的概念——在一

個本身正在膨脹的空間中以固定速率前進——也出現在宇宙學（cosmology）中，它決定了遙遠星系發出的光能否到達我們。這裏透過找出合適的量來解線性方程，其實是積分因子法（integrating-factor method）的一個例子；參見 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。