詳細解答

STEP II 2018，第 1 題

純數學 • 多項式的根

> **STEP II 2018，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q1

關鍵思路

係數由前往後讀和由後往前讀都一樣，所以把方程除以 x^2，就可以把這個四次方程（quartic）化為關於 $t = x + \frac{1}{x}$ 的二次方程（quadratic）。每一個 t 值都對應四次方程的一對根 k、$\frac{1}{k}$，而實數 x 只能給出 $|t| \geq 2$，且 $t = \pm 2$ 當且僅當 $x = \pm 1$。於是，數相異根的個數，就歸結為：哪些 t 值會出現，以及其中是否有一個等於 ± 2。

解答

根成倒數（reciprocal）對出現

設 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$。由於 $P(0) = 1 \neq 0$，任何根 k 都不為零，而且

$$k^4 P\left(\frac{1}{k}\right) = 1 + ak + bk^2 + ak^3 + k^4 = P(k) = 0.$$

因為 $k^4 \neq 0$，得 $P(\frac{1}{k}) = 0$，所以 k^{-1} 也是根。

代換（substitution）$t = x + \frac{1}{x}$

把 $P(x) = 0$ 除以 x^2（因 $x \neq 0$，這是可以的），並利用 $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$：

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \iff t^2 + at + (b - 2) = 0.$$

設 t_1、t_2 為這個二次方程的根，則 $t_1 + t_2 = -a$，$t_1 t_2 = b - 2$。展開可知

$$P(x) = (x^2 - t_1 x + 1)(x^2 - t_2 x + 1),$$

因為右方等於 $x^4 - (t_1 + t_2)x^3 + (2 + t_1 t_2)x^2 - (t_1 + t_2)x + 1$。所以 P 的根就是 $x^2 - t_1 x + 1$ 的根連同 $x^2 - t_2 x + 1$ 的根。

現在運用「所有根都是實數」這個假設。每個因式 $x^2 - t_i x + 1$ 都有兩個實根 k 和 $\frac{1}{k}$（它們的積是 1），而 $t_i = k + \frac{1}{k}$ 是實數。對於實數 $k \neq 0$，$k + \frac{1}{k}$ 與 k 同號，而且

$$\left|k + \tfrac{1}{k}\right| - 2 = \frac{(|k| - 1)^2}{|k|} \geq 0,$$

等號只在 $k = \pm 1$ 時成立。因此：

- 若 $|t_i| > 2$，因式 $x^2 - t_i x + 1$ 有兩個相異實根，兩者都不等於 ± 1；
- 若 $t_i = 2$，該因式為 $(x-1)^2$；若 $t_i = -2$，則為 $(x+1)^2$。

此外，不同的 t 值不可能有公共根 x，因為 x 決定了 $t = x + \frac{1}{x}$。

第 (i) 部分

若只有一個相異根 k，則 $\frac{1}{k} = k$，所以 $k = \pm 1$，且 $P(x) = (x \mp 1)^4$。展開得

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1, \qquad (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

兩者都具有所需的形式。所以所求的值為 $a = -4$, $b = 6$ 及 $a = 4$, $b = 6$。

第 (ii) 部分

逐一考慮 t_1、t_2 的各種可能（兩者都是實數，且 $|t_i| \geq 2$）：

- $t_1 \neq t_2$，且兩者都有 $|t_i| > 2$：四個相異根。
- $t_1 = t_2$：四次式是完全平方（perfect square）$(x^2 - t_1 x + 1)^2$，所以若 $|t_1| > 2$，有兩個相異根；若 $t_1 = \pm 2$，則只有一個。
- $\{t_1, t_2\} = \{2, -2\}$：$P(x) = (x-1)^2(x+1)^2$，兩個相異根。
- 其中一個 t_i 為 ± 2，另一個的絕對值大於 2：根為 ± 1（二重）及另外兩個根，即三個相異根。

? **想一想** 為甚麼其中一個 t 值必定是 ± 2？

四個根中只有三個相異，表示有某個根是重根（repeated root）；上面的列表顯示，在出現三個相異根的情況下，這只會在最後一種情況發生。說得更直接一點：根分成一對對互為倒數的根，而相異根的個數是奇數，就迫使某個根等於自己的倒數，即 ± 1。

所以 $t = 2$ 或 $t = -2$ 是 $t^2 + at + b - 2 = 0$ 的根：

$$\begin{aligned} t = 2: &\quad 4 + 2a + b - 2 = 0 \iff b = -2a - 2, \\ t = -2: &\quad 4 - 2a + b - 2 = 0 \iff b = 2a - 2. \end{aligned}$$

因此 $b = 2a - 2$ 或 $b = -2a - 2$，得證。

第 (iii) 部分

當 $b = 2a - 2$ 時，關於 t 的二次方程為

$$t^2 + at + 2a - 4 = (t + 2)(t + a - 2),$$

所以 $t_1 = -2$，$t_2 = 2 - a$。前者給出 $(x + 1)^2$，後者給出 $x^2 - (2 - a)x + 1 = 0$，所以

$$x = -1\text{（二重）}, \qquad x = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

由於題目告訴我們所有根都是實數，這些根都是實數；這相當於 $a^2 - 4a = a(a - 4) \geq 0$，即 $a \leq 0$ 或 $a \geq 4$。

最後部分

由 (ii)，要有三個相異根，就需要 $b = 2a - 2$ 或 $b = -2a - 2$。反過來，假設 $b = 2a - 2$（且所有根都是實數）。由 (iii)，t 的值為 -2 及 $2 - a$；根據上面的情況列表，除非 $2 - a = \pm 2$，否則恰好有三個相異根：

- $a = 0$，$b = -2$：$t = \pm 2$，$P(x) = (x^2 - 1)^2$，只有兩個相異根；
- $a = 4$，$b = 6$：$t = -2$ 出現兩次，$P(x) = (x + 1)^4$，只有一個根。

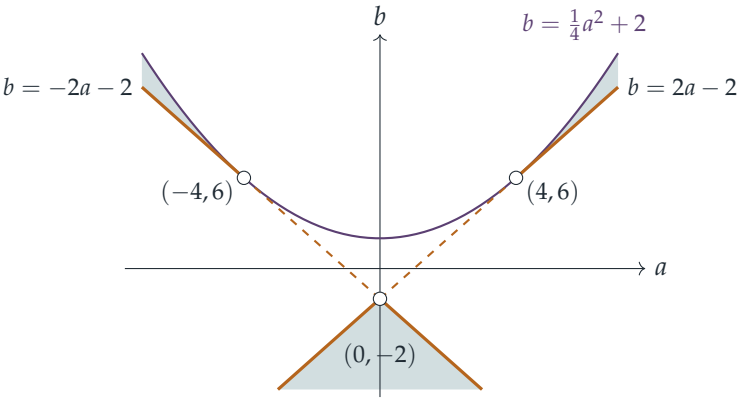
把 x 換成 $-x$，P 會變成同樣形式、但 a 換成 $-a$ 的多項式，這會把兩條直線互換。所以當 $b = -2a - 2$ 時，t 的值為 2 及 $-a - 2$，例外情況為 $a = 0$，$b = -2$ 及 $a = -4$，$b = 6$。

因此，對於使所有根都是實數的實數 a、b，$(*)$ 恰好有三個相異根當且僅當

$$b = 2a - 2 \text{ 或 } b = -2a - 2, \qquad \text{且} (a, b) \neq (0, -2),\ (4, 6),\ (-4, 6).$$

注意 $(4, -10)$ 和 $(-4, -10)$ 是容許的：例如 $a = 4$，$b = -10$ 給出 $t = 2$ 及 $t = -6$，所以有三個相異根。

下圖顯示 (a, b) 平面。陰影區域是所有根都是實數的地方：在兩條直線之下（一個 t 值最多為 -2，另一個至少為 2），或在 $|a| \geq 4$ 時位於直線與拋物線 $b = \frac{1}{4}a^2 + 2$ 之間（兩個 t 值在同一側）。拋物線是 $t_1 = t_2$ 的地方，它與兩條直線相切於 $(\pm 4, 6)$。答案就是兩條直線在陰影區域邊界上的實線部分，再除去三個空心圓點。



（直線的虛線部分，即 $0 < |a| < 4$，位於所有根都是實數的區域之外，這就是 (iii) 需要 $a \leq 0$ 或 $a \geq 4$ 的原因。）

驗算

- 取 $a = -4$，$b = -10$（在 $b = 2a - 2$ 上，且容許）。由 (iii) 得 $x = -1, -1, 3 \pm 2\sqrt{2}$，而確實 $(x+1)^2(x^2 - 6x + 1) = x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 4x + 1$。根 $3 \pm 2\sqrt{2} \approx 5.828,\ 0.172$ 互為倒數，正如預期。
- 在被排除的點 $a = 0$，$b = -2$，四次式為 $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$，只有兩個相異根。
- 我們用電腦對步長為 $\frac{1}{4}$、$|a| \leq 10$、$|b| \leq 15$ 的網格上每一點 (a, b) 以數值方法求根；在 1579 個所有根都是實數的網格點中，恰好是上述條件所預測的 88 個點給出三個相異根。

常見錯誤

- 忘記例外的點：單憑 $b = 2a - 2$ 是必要但不充分的，因為 $(0, -2)$ 和 $(4, 6)$ 都在這條直線上。
- 假設重根必定是 ± 1：二重的一對根 $k, k, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$ 也是可能的，但這只給出兩個相異根，而不是三個。

STEP 之外

係數正讀反讀都一樣的多項式稱為*迴文多項式*（palindromic，又稱倒數多項式，reciprocal），而 $t = x + \frac{1}{x}$ 這個技巧可以把任何偶數次的迴文多項式的次數減半。同樣的代

換配合 $x = e^{i\theta}$，會得到 $t = 2\cos\theta$；正是用這個方法可以求出 $2\cos(2\pi/n)$ 的極小多項式（minimal polynomial），高斯（Gauss）處理正 17 邊形時也是用這個方法。描述多項式的根在何處重合（正如上圖 (a, b) 平面中的曲線所做的）這個想法，引出了判別式（discriminant）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是進一步閱讀多項式及其根的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。