詳細解答

STEP I 2018，第 9 題

力學 • 斜面上的運動

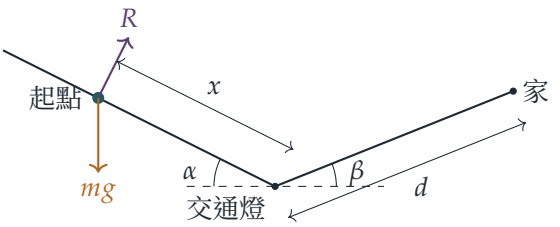
> **STEP I 2018，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q9

關鍵思路

由於沒有阻力，小型賽車（go-kart）在每段直路上的加速度都是常數：沿第一段斜坡向下的加速度為 $g\sin\alpha$，沿第二段斜坡向上則有大小為 $g\sin\beta$ 的減速度。因此每一段都是一個等加速度（constant acceleration）問題，而兩段之間由到達交通燈時的速率連接起來。能量（或 $v^2 = u^2 + 2as$）決定我到底能否到家；時間則由每一段上的 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ 得出，其餘就是以 k 表示的細心代數運算。

解答

把小型賽車連同駕駛者模擬為一個質點（particle），沿每條最大斜率直線（line of greatest slope）運動，沒有摩擦力，也沒有空氣阻力。所受的力只有重量 mg 和法向反作用力（normal reaction）R，而後者不做功。



到達家門

沿第一段斜坡分解力，重量沿斜坡向下的分量為 $mg\sin\alpha$，所以加速度為 $g\sin\alpha$。由靜止出發並走過距離 x 後，到達交通燈時的速率 V 滿足

$$V^2 = 2gx\sin\alpha.$$

由於速率沒有突變，我以速率 V 開始駛上第二段，此時重量沿斜坡產生大小為 $g\sin\beta$ 的減速度。在交通燈以外距離 s 處，我的速率 v 滿足 $v^2 = V^2 - 2gs\sin\beta$。要到達家門，v^2 必須一直保持非負，直至 $s = d$，即

$$2gx\sin\alpha - 2gd\sin\beta \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad x\sin\alpha \geq d\sin\beta,$$

這正是所求。（等價地說：根據能量守恆（conservation of energy），我永遠不能升到高於起點的高度，而起點比交通燈高 $x\sin\alpha$，家則比交通燈高 $d\sin\beta$。）

總時間

為使代數簡潔，設 $c = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)^{1/2}$，則 $g\sin\alpha = 2c^2$；又因 $\sin\beta = \sin\alpha/k$，故 $g\sin\beta = 2c^2/k$。

第一段。由 $x = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_1^2 = c^2t_1^2$ 可知到達交通燈的時間為 $t_1 = \sqrt{x}/c$，而該處的速率為 $V = (g\sin\alpha)t_1 = 2c\sqrt{x}$。

第二段。從交通燈起量度 s，有 $s = Vt - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2$，所以到達 $s = d$ 的時間 t_2 滿足

$$\frac{c^2}{k}\,t_2^2 - 2c\sqrt{x}\,t_2 + d = 0.$$

想一想 這個二次方程有兩個根。哪一個才是我到達的時間？

較大的根是：假如斜坡無限長，質點停下後沿斜坡滑回，再次經過 $s = d$ 的時間。我是在第一次到達 $s = d$ 時到家，所以我們要取較小的根：

$$t_2 = \frac{2c\sqrt{x} - \sqrt{4c^2x - 4c^2d/k}}{2c^2/k} = \frac{k}{c}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - \tfrac{d}{k}}\right) = \frac{1}{c}\left(k\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}\right),$$

這裏因 $k > 0$ 而用了 $k\sqrt{x - d/k} = \sqrt{k^2x - kd}$。平方根之所以是實數，正是因為 $x \geq d/k$，也就是第一部分的條件 $x\sin\alpha \geq d\sin\beta$。

相加得 $T = t_1 + t_2$，於是

$$\left(\frac{g\sin\alpha}{2}\right)^{1/2} T = cT = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd},$$

這就是所求的結果。

使 T 最小

由於 c 是正常數，我們在 $x \geq d/k$ 上求 $f(x) = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}$ 的最小值。求導（differentiating）得

$$f'(x) = \frac{1+k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{k^2x - kd}}.$$

令 $f'(x) = 0$，得 $(1+k)\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}$。兩邊皆為正，所以平方不會失去任何資訊：

$$\begin{aligned}(1+k)^2(k^2x - kd) &= k^4x \\ x\left[(1+k)^2k^2 - k^4\right] &= (1+k)^2kd \\ xk^2(1+2k) &= (1+k)^2kd,\end{aligned}$$

這裏用了 $(1+k)^2 - k^2 = 1+2k$。除以 $k^2(1+2k) > 0$，得

$$x = \frac{(1+k)^2}{k(1+2k)}\,d.$$

這是一個容許的起點：$(1+k)^2 = 1+2k+k^2 > 1+2k$，所以這個 x 嚴格大於 d/k，我確實能到家。

存在最佳的 x 是合理的：起點太近，我在山坡最後一段就會慢得像爬行；起點太遠，我又要在第一段斜坡上花很長時間。

驗算

- 在最佳點，$\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}/(1+k)$，所以 $cT = \sqrt{x}\,\dfrac{1+2k}{1+k} = \sqrt{\dfrac{(1+2k)d}{k}}$，最短時間的形式簡潔得令人愉快。
- 取 $\alpha = \beta$，即 $k = 1$。此時最佳點為 $x = \frac{4}{3}d$，公式給出 $cT = 2\sqrt{4d/3} - \sqrt{d/3} = \sqrt{3d}$，與上一項驗算吻合。
- 在臨界值 $x = d/k$ 時，我只是剛好慢慢挪到門口，且 $f'(x) \to -\infty$，所以把起點稍為後移必定能節省時間。
- 以細小的時間間隔逐步數值推進運動，並對多組隨機角度和距離進行測試，結果與 T 的公式在五位有效數字內一致；以電腦搜尋 x，找到的最小值亦正是上面所得的值。

常見錯誤

- 為 t_2 取了二次方程的較大根：那是滑回下坡時經過家門的時間。

- 忘記交通燈處的速率並非已知，必須由第一段延續過來。
- 遺漏條件 $x \geq d/k$，而正是這個條件使 $\sqrt{k^2x - kd}$ 為實數。

STEP 之外

最短時間的簡潔答案暗示了一個更廣闊的主題：選擇路徑或起點以使行程時間最短，正是*變分法*（calculus of variations）的研究對象；其最著名的問題——最速降線（brachistochrone）問題——就是要找出在重力作用下下降最快的曲線。在大學一年級的力學課程中，你亦會接觸到這個想法：對於保守力（conservative forces），單靠能量就能告訴你質點可以到達哪裏，而要求時間則必須對運動方程（equation of motion）積分。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這兩個想法都有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。