詳細解答

STEP I 2018，第 8 題

純數學 • 耦合微分方程

> **STEP I 2018，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q8

關鍵思路

兩條導數（derivative）規則是刻意設計成互相抵消的：每當出現 s'，就會帶來 c^2；每當出現 c'，就會帶來 $-\mathrm{s}^2$。因此，貫穿全題最自然的做法，是對乘積和商求導，觀察各項如何合併，然後利用 (i) 的恆等式（identity）把所有東西化成單一個函數。至於積分（integral），要把每個被積函數看成「某東西乘以 s^2」或「某東西乘以 c^2」，因為這些正正是我們已知的導數。最後兩部分中關於 u 的積分，其實是同樣的積分換了個樣子。

解答

全題中，在不會引起混淆時，以 s 和 c 分別表示 $\mathrm{s}(x)$ 和 $\mathrm{c}(x)$。

第 (i) 部分

由連鎖法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3\right)=3\mathrm{s}^2\,\mathrm{s}'+3\mathrm{c}^2\,\mathrm{c}'=3\mathrm{s}^2\mathrm{c}^2-3\mathrm{c}^2\mathrm{s}^2=0,$$

所以 $\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3$ 是常數。它在 $x=0$ 的值是 $0^3+1^3=1$，因此

$$\mathrm{s}(x)^3+\mathrm{c}(x)^3=1 \quad \text{對所有} x,$$

即為所求。這個恆等式是全題其餘部分的引擎：它讓我們可以把 s^3 換成 $1-\mathrm{c}^3$，反之亦然。

第 (ii) 部分

由乘積法則（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc}) = \mathrm{s}'\mathrm{c} + \mathrm{sc}' = \mathrm{c}^2 \cdot \mathrm{c} + \mathrm{s} \cdot (-\mathrm{s}^2) = \mathrm{c}^3 - \mathrm{s}^3.$$

利用 (i)，$\mathrm{s}^3 = 1 - \mathrm{c}^3$，所以上式等於 $\mathrm{c}^3 - (1 - \mathrm{c}^3) = 2\mathrm{c}^3 - 1$，正是我們想要的結果。

至於商（在 $\mathrm{c}(x) \neq 0$ 之處），商法則（quotient rule）給出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\mathrm{s}'\mathrm{c} - \mathrm{sc}'}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{c}^3 + \mathrm{s}^3}{\mathrm{c}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}(x)^2},$$

同樣是用了 (i)。留意這與 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ 之間令人愉快的對應。

第 (iii) 部分

由於 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$，第一個積分可以立即寫出：

$$\int \mathrm{s}(x)^2 \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + C.$$

想一想 怎樣改寫 s^5，才能令已知的導數 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ 出現？

分出一個因子 s^2，再對餘下部分使用 (i)：$\mathrm{s}^5 = \mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{s}^2 = (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{s}^2 = -(1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}'$。這是 $g(\mathrm{c})\,\mathrm{c}'$ 的形式，可用逆連鎖法則（reverse chain rule）積分：

$$\int \mathrm{s}(x)^5 \,\mathrm{d}x = -\int (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}' \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + \tfrac{1}{4}\mathrm{c}(x)^4 + C.$$

（求導回去驗證：$-\mathrm{c}' + \mathrm{c}^3\mathrm{c}' = -\mathrm{c}'(1 - \mathrm{c}^3) = \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}^3$，結果理應如此。）

第 (iv) 部分

設 $u = \mathrm{s}(x)$，於是 $x = \mathrm{s}^{-1}(u)$，且 $\mathrm{d}u = \mathrm{s}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{c}(x)^2\,\mathrm{d}x$。由 (i)，$\mathrm{c}^3 = 1 - u^3$，所以 $\mathrm{c} = (1 - u^3)^{1/3}$（取實立方根，無論 c 的正負號如何都成立），因此

$$(1 - u^3)^{2/3} = \mathrm{c}(x)^2.$$

於是

$$\int \frac{1}{(1 - u^3)^{2/3}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C = \mathrm{s}^{-1}(u) + C,$$

這正是我們要證明的。

第 (v) 部分

使用同一個代換（substitution），其中 $(1 - u^3)^{1/3} = \mathrm{c}$，且 $\mathrm{d}u = \mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$。

對於第一個積分，$(1-u^3)^{4/3} = \mathrm{c}^4$，所以由 (ii) 中關於商的結果，

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^3)^{4/3}} = \int \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{c}^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{c}(x)} + C = \frac{u}{(1-u^3)^{1/3}} + C.$$

對於第二個積分，

$$\int (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{c}\cdot\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x.$$

(ii) 中關於乘積的結果說明 $\mathrm{c}^3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc})\right)$，所以

$$\int \mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(x + \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)) + C.$$

回到 u，其中 $x = \mathrm{s}^{-1}(u)$，且 $\mathrm{sc} = u(1-u^3)^{1/3}$：

$$\int (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{s}^{-1}(u) + u(1-u^3)^{1/3}\right) + C.$$

驗算

- (v) 的答案可以透過對 u 求導來驗證。例如，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}} = \frac{1}{(1-u^3)^{1/3}} + \frac{u^3}{(1-u^3)^{4/3}} = \frac{1}{(1-u^3)^{4/3}}.$$

- 以數值方法解微分方程（differential equation）至 $x = 1.2$，得 $\mathrm{s}(1.2) \approx 0.9411$ 及 $\mathrm{c}(1.2) \approx 0.5500$，而確實 $0.9411^3 + 0.5500^3 \approx 1$。設 $U = \mathrm{s}(1.2)$，數值積分給出 $\int_0^U (1-u^3)^{-2/3}\,\mathrm{d}u \approx 1.2000$，與 (iv) 的預測一致；又 $\int_0^U (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u \approx 0.8588 = \frac{1}{2}(1.2 + 0.9411\times 0.5500)$，與 (v) 吻合。
- 數值上，$\int_0^{1.2} \mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x \approx 0.4500 = 1 - \mathrm{c}(1.2)$，與 (iii) 一致。

常見錯誤

- 寫成 $\int \mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x = +\mathrm{c} + C$：$\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ 中的負號很容易遺漏。
- 在 (iv) 和 (v) 中，忘記把 $\mathrm{d}u$ 轉換成 $\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$，或者最終答案仍以 x 而非 u 表示。
- 在 (v) 中試圖直接積分 c^3，而沒有察覺 (ii) 早已把它表示為一個導數加一個常數。

STEP 之外

對曲線 $x^3 + y^3 = 1$ 而言，s, c 這一對函數的角色，就如 sin 和 cos 之於圓 $x^2 + y^2 = 1$；這類「廣義三角函數」(generalised trigonometric functions) 與橢圓函數 (elliptic functions) 是

近親，後者正是透過反演類似 (iv) 中的積分而產生的，就如 $\sin^{-1} u = \int (1-u^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ 一樣。以帶初始條件的微分方程來定義函數，再由此推導出它們的全部性質，是大學一年級的標準技巧；而題目中假設這些函數是「唯一確定」的，背後就是常微分方程（ODE）的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《基礎微分方程》）既涵蓋相關理論，也有許多耦合方程組的例子。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。