詳細解答

STEP I 2018，第 7 題

純數學 • 解三次方程

> **STEP I 2018，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q7

關鍵思路

這個代換（substitution）是一個默比烏斯變換（Möbius transformation），經過精心選取，使得去分母之後 z^2 項和 z 項互相抵消，只剩下 z^3 和常數項。形如 $az^3+b=0$ 的三次方程（cubic equation）很容易解，所以整個任務就是把一般的既約三次方程（reduced cubic）$x^3-3cx+d=0$ 化成這個特殊形式。要做到這一點，就要由兩個數的和與積求出這兩個數，這歸結為一個二次方程（quadratic equation）；而條件 $d^2>4c^3$ 正是來自這個二次方程有相異實根（distinct real roots）的條件。

解答

第 (i) 部分

設 $x=\dfrac{pz+q}{z+1}$，並把方程兩邊乘以 $(z+1)^3$：

$$(pz+q)^3-3pq(pz+q)(z+1)^2+pq(p+q)(z+1)^3=0.$$

我們需要用到 $(pz+q)(z+1)^2=pz^3+(2p+q)z^2+(p+2q)z+q$。現在按 z 的冪次合併同類項。

$$\begin{aligned}
z^3:&\quad p^3-3p^2q+p^2q+pq^2=p(p^2-2pq+q^2)=p(p-q)^2,\\
z^2:&\quad 3p^2q-3pq(2p+q)+3pq(p+q)=3p^2q-6p^2q-3pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^1:&\quad 3pq^2-3pq(p+2q)+3pq(p+q)=3pq^2-3p^2q-6pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^0:&\quad q^3-3pq^2+p^2q+pq^2=q(q^2-2pq+p^2)=q(p-q)^2.
\end{aligned}$$

因此方程化為 $az^3+b=0$，其中

$$a=p(p-q)^2, \qquad b=q(p-q)^2.$$

由於 $p\neq q$，我們可以除以 $(p-q)^2$，得到更簡單的形式 $pz^3+q=0$。

對於每個 $x\neq p$，這個代換都可以反解為 $z=\dfrac{x-q}{p-x}$；而 $x=p$ 只有在 $p(p-q)^2=0$ 時才是該三次方程的根。此外，$z=-1$ 永遠不是 $pz^3+q=0$ 的解，因為那需要 $p=q$。所以三次方程的根與 $pz^3+q=0$ 的根恰好一一對應（當 $p=0$ 時，三次方程就是 $x^3=0$）。

第 (ii) 部分

比較 $x^3-3cx+d$ 與 $x^3-3pqx+pq(p+q)$，我們需要

$$pq=c, \qquad pq(p+q)=d, \qquad \text{即} \qquad pq=c, \quad p+q=\frac{d}{c},$$

由於 $c\neq 0$，除以 c 是容許的。和為 $\frac{d}{c}$、積為 c 的兩個數，就是

$$t^2-\frac{d}{c}t+c=0.$$

的兩個根。這個二次方程有相異實根，當且僅當其判別式（discriminant）為正：

$$\frac{d^2}{c^2}-4c>0 \iff d^2>4c^3,$$

這裡乘以了 $c^2>0$。所以當 $d^2>4c^3$ 時，取 p 和 q 為這個二次方程的兩個根，就能把方程寫成所需的形式，而且 p、q 是相異的實數。

第 (iii) 部分

這裡 $c=-2$ 而 $d=-2$，所以 $d^2=4>-32=4c^3$，第 (ii) 部分適用。我們需要 $p+q=\frac{d}{c}=1$ 及 $pq=c=-2$，所以 p、q 是 $t^2-t-2=(t-2)(t+1)=0$ 的根。取 $p=2$、$q=-1$。由第 (i) 部分，方程變為

$$2z^3-1=0, \qquad z^3=\tfrac{1}{2},$$

它唯一的實根是 $z=2^{-1/3}$。記 $u=2^{1/3}$，則 $z=\frac{1}{u}$。於是

$$x=\frac{2z-1}{z+1}=\frac{2-u}{1+u}.$$

想一想 分母含有立方根，這個式子能否再化簡？

可以。利用 $1+u^3=(1+u)(1-u+u^2)$ 進行有理化（rationalise），由於 $u^3=2$，這個式子等於 3：

$$x=\frac{(2-u)(1-u+u^2)}{3}=\frac{2-3u+3u^2-u^3}{3}=\frac{3u^2-3u}{3}=u^2-u.$$

所以實根是

$$x = 2^{2/3} - 2^{1/3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

這是唯一的實根：$x^3 + 6x - 2$ 的導數（derivative）是 $3x^2 + 6 > 0$，所以它嚴格遞增。z 的另外兩個值是複數，給出兩個複根。（若改為取 $p = -1$、$q = 2$，則得到 $z^3 = 2$，結果是同一個根。）

第 (iv) 部分

由於 $x = p$ 給出 $p^3 - 3p^3 + 2p^3 = 0$，所以 $x - p$ 是一個因式（factor），而

$$x^3 - 3p^2x + 2p^3 = (x-p)(x^2 + px - 2p^2) = (x-p)^2(x+2p).$$

所以根是 $x = p$（重根）和 $x = -2p$。

留意這正是第 (i) 部分中 $q = p$ 的形式，也恰好是第 (ii) 部分排除了的情況。現在設 $d^2 = 4c^3$，且 $c, d \neq 0$。那麼 $c^3 = \frac{1}{4}d^2 > 0$，所以 $c > 0$。我們要找 p 使得 $p^2 = c$ 及 $2p^3 = d$。把第二式除以第一式，啟發我們取

$$p = \frac{d}{2c},$$

而這確實可行：$p^2 = \dfrac{d^2}{4c^2} = \dfrac{4c^3}{4c^2} = c$，於是 $2p^3 = 2p \cdot p^2 = 2 \cdot \dfrac{d}{2c} \cdot c = d$。所以 $x^3 - 3cx + d = x^3 - 3p^2x + 2p^3$，其根為

$$x = \frac{d}{2c}\text{（二重）} \qquad \text{及} \qquad x = -\frac{d}{c}.$$

驗算

- 第 (iii) 部分：$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \approx 0.32748$，而 $x^3 + 6x - 2$ 在這個值的取值準確到小數點後十五位都是 0。卡爾達諾公式（Cardano's formula）給出同一個根：$\sqrt[3]{1+3} + \sqrt[3]{1-3}$。
- 第 (iv) 部分：取 $c = 1$、$d = 2$，三次方程為 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$，與二重根 $\frac{d}{2c} = 1$ 及單根 $-\frac{d}{c} = -2$ 吻合。
- 第 (i) 部分：取 $p = 1$、$q = 0$，三次方程為 $x^3 = 0$，代換給出 $x = \frac{z}{z+1}$，所以 $x^3(z+1)^3 = z^3$，與 $a = 1$、$b = 0$ 吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記 c 可能是負數：不等式乘以 c^2 是安全的，但乘以 c 就不是。
- 在第 (iii) 部分把 $\frac{1}{2}$ 的三個立方根全部當作實根。只有 $z = 2^{-1/3}$ 是實數。

- 在第 (iv) 部分取 $p = \sqrt{c}$。當 $d < 0$ 時符號就錯了；$p = \frac{d}{2c}$ 則會自動給出正確的符號。

STEP 之外

這是推導三次方程卡爾達諾公式的一條巧妙途徑。二次方程 $t^2 - \frac{d}{c}t + c = 0$ 扮演了「預解式」（resolvent）的角色，而 $d^2 - 4c^3$ 的符號（相差一個因子）就是三次方程的判別式，它決定方程有一個實根還是三個實根。為何三次和四次方程可以用根式求解，而一般的五次方程卻不能，正是伽羅瓦理論（Galois theory）的主題。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是開始閱讀這方面內容的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。