詳細解答

STEP I 2018，第 6 題

純數學 • 中點法則與梯形法則

> **STEP I 2018，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q6

關鍵思路

兩個近似值都是等距角的正弦之和，而題目給出的積化和差恆等式（product-to-sum identity）只要乘上一個選得恰當的 $2\sin\theta$，就能令這類和式裂項相消（telescope）。中點法則（midpoint rule）在 $\frac{\pi}{2n}$ 的奇數倍處取樣，梯形法則（trapezium rule）則在偶數倍處取樣，所以取 $\theta = \frac{\pi}{2n}$ 後，每一部分都變成裂項相消的和式。一旦求得 A_n 和 B_n 的閉式（closed form），第 (iii) 部分就只是半角公式（half-angle formulae）的運用。

解答

預備恆等式

在恆等式中取 $P = \theta$ 及 $Q = (2k-1)\theta$：

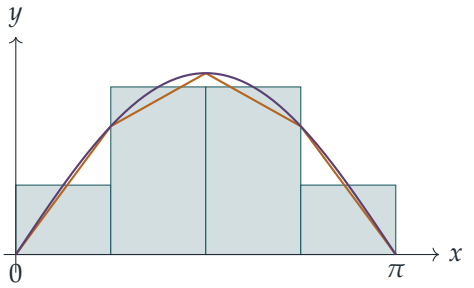
$$2\sin\theta\,\sin(2k-1)\theta = \cos(2k-2)\theta - \cos 2k\theta.$$

由 $k = 1$ 加到 $k = n$，每一項中減去的 $\cos 2k\theta$ 都在下一項中加回，因此和式裂項相消：

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta &= (\cos 0 - \cos 2\theta) + (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \cdots \\ &\quad + (\cos(2n-2)\theta - \cos 2n\theta) \\ &= 1 - \cos 2n\theta, \end{aligned}$$

得證。

以下各部分中，記條寬為 $h = \frac{\pi}{n}$，並記 $\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{h}{2}$。



當 $n = 4$ 時：由於 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上是凹函數（concave），中點矩形（陰影部分）高估了面積，而梯形的弦（粗線）則低估了面積。

第 (i) 部分

第 k 條由 $(k-1)h$ 延伸至 kh，所以其中點位於 $x = (k - \frac{1}{2})h = (2k-1)\theta$，高度為 $\sin(2k-1)\theta$。因此

$$A_n = h \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta.$$

乘以 $2\sin\theta$ 並利用恆等式，再加上 $2n\theta = \pi$，得

$$2\sin\theta\, A_n = h\,(1 - \cos\pi) = 2h.$$

兩邊除以 2，得 $A_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}$，得證。

第 (ii) 部分

縱坐標（ordinates）位於 $x = kh = 2k\theta$，其中 $k = 0, 1, \ldots, n$，而兩端的縱坐標為 $\sin 0 = \sin\pi = 0$。所以梯形法則給出

$$B_n = \frac{h}{2}\left(\sin 0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta + \sin\pi\right) = h\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta.$$

現在這些是 θ 的偶數倍，所以我們再用一次恆等式，這次取 $P = \theta$、$Q = 2k\theta$：

$$2\sin\theta\, \sin 2k\theta = \cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta.$$

由 $k = 1$ 加到 $n-1$，同樣裂項相消：

$$2\sin\theta \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta = \cos\theta - \cos(2n-1)\theta.$$

? **想一想** 怎樣化簡 $\cos(2n-1)\theta$？

由於 $2n\theta = \pi$，我們有 $(2n-1)\theta = \pi - \theta$，而 $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$。所以右方等於 $2\cos\theta$，從而

$$2\sin\theta\, B_n = 2h\cos\theta, \qquad \text{即} \qquad B_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

（當 $n=1$ 時和式為空，$B_1 = 0$；由於 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$，公式依然成立。）

第 (iii) 部分

由於 $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$，$\sin\theta \neq 0$，所以由第 (i) 及 (ii) 部分得

$$A_n = \frac{h}{\sin\theta}, \qquad B_n = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}.$$

把 n 換成 $2n$，h 和 θ 都減半：

$$A_{2n} = \frac{h/2}{\sin(\theta/2)}, \qquad B_{2n} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

第一個結果利用 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 及 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$：

$$\tfrac{1}{2}(A_n + B_n) = \frac{h}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = B_{2n}.$$

第二個結果利用同一條 $\sin\theta$ 的二倍角公式（double-angle formula）（以及 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$）：

$$A_n B_{2n} = \frac{h}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\cdot\frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{h^2}{4\sin^2(\theta/2)} = \left(\frac{h/2}{\sin(\theta/2)}\right)^2 = A_{2n}^2.$$

兩個結果均已證明。

驗算

- $n=1$：一個寬 π、高 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ 的中點矩形給出 $A_1 = \pi$，與 $\pi/\sin\frac{\pi}{2}$ 相符；而如前所述 $B_1 = 0$。
- $n=2$：$A_2 = \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214$，$B_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$；於是 $\frac{1}{2}(A_1 + B_1) = \frac{\pi}{2} = B_2$，且 $A_1 B_2 = \frac{\pi^2}{2} = A_2^2$。
- $n=10$：直接求和得 $A_{10} \approx 2.00825$ 及 $B_{10} \approx 1.98352$，分別位於真實面積 2 的兩側。當 $n\to\infty$ 時，$\frac{\pi}{n}\big/\sin\frac{\pi}{2n} \to 2$ 且 $\cos\frac{\pi}{2n} \to 1$，所以兩者都趨向 2，正合預期。四個結果亦已用電腦就 200 以內的每個 n 逐一驗證。

常見錯誤

- 把中點放在 kh 而不是 $(k-\frac{1}{2})h$，這樣中點法則就變成了在梯形法則節點上的求和。

- 忘記梯形法則中兩端的縱坐標要減半。這裏兩端縱坐標為零，所以 B_n 恰好是 h 乘以內部縱坐標之和。
- 沒有化簡 $\cos(2n-1)\theta$，而不懂利用 $(2n-1)\theta = \pi - \theta$。

STEP 之外

第 (iii) 部分表明 B_{2n} 是 A_n 與 B_n 的算術平均數（arithmetic mean），而 A_{2n} 是 A_n 與 B_{2n} 的幾何平均數（geometric mean）。取倒數後，這就變成先取調和平均數（harmonic mean）、再取幾何平均數的模式，正是阿基米德（Archimedes）用圓的外切及內接多邊形夾逼 π 的方法，而這種迭代稱為 Borchardt 算法（Borchardt's algorithm）。更一般地，比較中點法則與梯形法則的誤差（中點法則的誤差約為梯形法則誤差的一半，且符號相反），便引出辛普森法則（Simpson's rule）和理察森外推法（Richardson extrapolation），兩者都是數值分析（numerical analysis）的核心概念。關於這些法則背後的誤差分析，可參閱 Bartle 與 Sherbert 所著 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）中有關黎曼積分（Riemann integral）的章節。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。