詳細解答

STEP I 2018，第 5 題

純數學 • 多項式與因式定理

STEP I 2018，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s1-q5

關鍵思路

「在這些點取值 1」其實是一個關於根（root）的陳述：若 $P(k)=1$，則 k 是 $P(x)-1$ 的根，所以 $x-k$ 是它的因式（factor）。只要減去那個共同的值再因式分解（factorise），題目每一部分都會變得容易。在第 (iii) 部分，因式分解把關於 S 的問題，轉化為「把一個小數寫成四個相異整數之積」的問題，而真正起決定作用的正是「相異」這個條件。

解答

第 (i) 部分

根據餘式定理（remainder theorem），$P(x)$ 除以 $x-k$ 的餘數是 $P(k)$。所以我們需要 $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=1$，即 $1,2,3,4$ 是 $P(x)-1$ 的根。由於 $P(x)-1$ 的次數（degree）最多為 4，而且有這四個相異的根，它必定是 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的常數倍。因此最一般的這類多項式是

$$P(x)=1+k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \qquad k\neq 0,$$

其中需要 $k\neq 0$，次數才會恰好是 4。

第 (ii) 部分

與第 (i) 部分完全一樣，$1,2,\ldots,N$ 是 $P(x)-1$ 的 N 個相異根，而它的次數為 N（因為 $N\geq 1$，減去 1 不會改變次數）。所以

$$P(x)-1=k(x-1)(x-2)\cdots(x-N)$$

其中 k 為某常數；又因為 P 的次數為 $N \geq 1$，所以 $k \neq 0$。於是

$$P(N+1) - 1 = k \cdot N(N-1) \cdots 1 = k\,N! \neq 0,$$

因為 k 和 $N!$ 都不為零。所以 $P(N+1) \neq 1$。

若 $P(N+1) = 2$，則 $k\,N! = 1$，所以 $k = \frac{1}{N!}$。對正整數 r，

$$\begin{aligned} P(N+r) &= 1 + \frac{(N+r-1)(N+r-2)\cdots r}{N!} \\ &= 1 + \frac{(N+r-1)!}{(r-1)!\,N!} = 1 + \binom{N+r-1}{N}. \end{aligned}$$

（這個乘積共有 N 個因子，由 $N+r-1$ 遞減至 r。）

現在我們希望對每個 N 都有 $1 + \binom{N+r-1}{N} = N + r$。試試較小的 r。取 $r = 1$，得 $P(N+1) = 2$，它只在 $N = 1$ 時才等於 $N+1$。取 $r = 2$，

$$P(N+2) = 1 + \binom{N+1}{N} = 1 + (N+1) = N+2,$$

所以無論 N 是多少，$r = 2$ 都成立。

第 (iii) 部分

四個相異整數 a, b, c, d 是 $S(x) - 2001$ 的根，而它的次數為 4，首項係數（leading coefficient）為 1。所以

$$S(x) = 2001 + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

(a) 假設對某整數 e 有 $S(e) = 2018$。那麼

$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 17.$$

這四個因子都是整數，而且由於 a, b, c, d 互不相同，它們也互不相同。它們都不是 0，因為乘積不為零。

> **想一想** 四個相異整數為甚麼乘不出一個質數？

在相異的非零整數之中，絕對值為 1 的最多只有兩個（即 1 和 -1）。所以四個因子中至少有兩個的絕對值不少於 2，而這兩個因子之積的絕對值不少於 4。但這個積整除（divides）17，所以它必須是 ± 17；由於 17 是質數（prime），它不能寫成兩個絕對值都不少於 2 的整數之積。這個矛盾說明不存在整數 e 使 $S(e) = 2018$。

(b) 現在 $S(0) = 2001 + (-a)(-b)(-c)(-d) = 2001 + abcd$，所以 $S(0) = 2017$ 當且僅當

$$abcd = 16.$$

反過來，任何四個乘積為 $abcd = 16$ 的相異整數都給出一個合乎要求的 S（上面的式子是首一（monic）且係數為整數），所以我們要數的是由四個相異整數組成、乘積為 16 的集合 $\{a, b, c, d\}$ 有多少個；每個集合都恰好只有一種方式按遞增次序排列。

a, b, c, d 每一個都整除 16，所以其絕對值是 $1, 2, 4, 8, 16$ 之一，而四個絕對值之積為 16。由於這些整數互不相同，每個絕對值最多出現兩次（作為 $\pm m$）。把絕對值寫成冪 2^p，四個指數之和為 4，且每個指數最多用兩次，可能的情況是

$$\{1,1,2,8\}, \qquad \{1,1,4,4\}, \qquad \{1,2,2,4\}.$$

（若用上 16，其餘三個便必須是 1、1、1，這是不容許的；而 $\{2,2,2,2\}$ 把 2 用了四次。）現在選取正負號，使乘積為 $+16$：

- $\{1,1,2,8\}$：那一對是 $1, -1$，貢獻 -1，所以 2、8 之中恰好有一個是負數。這給出 $\{-2,-1,1,8\}$ 和 $\{-8,-1,1,2\}$。
- $\{1,1,4,4\}$：兩對都是 $\pm$，而 $(1)(-1)(4)(-4) = 16$。這給出 $\{-4,-1,1,4\}$。
- $\{1,2,2,4\}$：那一對 $2, -2$ 貢獻 -4，所以 1、4 之中恰好有一個是負數。這給出 $\{-4,-2,1,2\}$ 和 $\{-2,-1,2,4\}$。

所以選取 $a < b < c < d$ 共有 **5** 種方法。

驗算

- 在第 (ii) 部分取 $N = 1$，則 $P(x) = x$，所以 $P(N + r) = 1 + r$ 與 $1 + \binom{r}{1}$ 相符，而且 $P(3) = 3$。取 $N = 2$，則 $P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$ 給出 $P(4) = 4$，與 $r = 2$ 的結論一致。
- 對於 (iii)(b)，把五個集合逐一乘出來：例如 $(-2)(-1)(2)(4) = 16$。用電腦搜尋 $[-16, 16]$ 內所有由相異整數組成的四元組，找到的正是這五個。
- 對於 (iii)(a)，留意 $2018 - 2001 = 17$ 是質數；若把 2001 換成另一個值，使差變成像 $4 = (-2)(-1)(1)(2)$ 這樣的數，這樣的 e 便可能存在，所以質數性確實是關鍵。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記 $k \neq 0$，或只寫 $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1$，而這並不是最一般的多項式。

- 在第 (iii)(b) 部分只數正因數，或忘記 1 和 -1 可以同時使用。
- 寫成 $S(0) = 2001 - abcd$：其實共有四個負號，所以乘積是 $+abcd$。

STEP 之外

「一個 N 次多項式由它在 $N+1$ 個點上的值所決定」這個想法，是拉格朗日（Lagrange）插值（Lagrange interpolation）和有限差分（finite differences）的基礎；第 (ii) 部分其實就是換了個樣子的多項式 $1 + \binom{x-1}{N}$。第 (iii) 部分是數論（number theory）中一個標準工具的小例子：若 P 的係數都是整數，則 $m - n$ 整除 $P(m) - P(n)$，這大大限制了多項式在整數上能取的值。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是進一步閱讀這類整除論證的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。