詳細解答

STEP I 2018，第 4 題

純數學 • 曲線描繪與積分

> **STEP I 2018，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q4

關鍵思路

f 的每一部分都由 $\ln x$ 構成，而那個麻煩的因子 $\frac{1}{x}$ 正好是 $\ln x$ 的導數（derivative）。因此代換（substitution）$u = \ln x$ 可把積分變成一個關於 u 的簡單有理函數（rational function）的積分。以 u 表示時，把 x 換成 x^{-1} 只是改變 u 的正負號，所以對稱性（symmetry）歸結為答案是 u 的偶函數（even function）。

解答

全文設 $u = \ln x$。由於 $x \neq 1$，所以 $u \neq 0$；而且 $u > 0$ 當且僅當 $x > 1$。

f 與 f′ 的零點

設

$$g(u) = \frac{(1-u^2)^2}{u} = \frac{1}{u} - 2u + u^3, \qquad \text{從而} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{g(\ln x)}{x}.$$

當 $(\ln x)^2 = 1$ 時，因子 $(1-u^2)^2$ 為零，所以 $\mathrm{f}(x) = 0$。由商法則（quotient rule）及鏈式法則（chain rule），

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{g'(u)\cdot\frac{1}{x}\cdot x - g(u)}{x^2} = \frac{g'(u) - g(u)}{x^2}.$$

我們已知 $g(\pm 1) = 0$。此外，由於 $(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2$ 在 $u = \pm 1$ 處有重因子（repeated factor），它的導數 $-4u(1-u^2)$ 在該處亦為零，因此

$$g'(u) = \frac{-4u(1-u^2)\cdot u - (1-u^2)^2}{u^2} = 0 \quad \text{當} u = \pm 1.$$

所以每當 $(\ln x)^2 = 1$，即在 $x = e$ 及 $x = e^{-1}$ 處，亦有 $\mathrm{f}'(x) = 0$。

第 (i) 部分

代入 $u = \ln t$，則 $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$。於是

$$\int \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)\mathrm{d}u = \ln|u| - u^2 + \tfrac{1}{4}u^4 + C.$$

定義 $G(u) = \ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4$。F 的兩段定義都不會讓積分範圍跨過 $t = 1$，所以在每一段上 u 的正負號不變，這個原函數（antiderivative）在該處成立。

當 $x > 1$ 時，下限 $t = e$ 給出 $u = 1$，而 $G(1) = 0 - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$。當 $0 < x < 1$ 時，下限 $t = e^{-1}$ 給出 $u = -1$，同樣有 $G(-1) = -\frac{3}{4}$。因此兩種情況得出同一條公式：

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \ln|\ln x| - (\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} \qquad (x > 0,\ x \neq 1).}$$

現在 $\ln(x^{-1}) = -\ln x$。上式中每一處 $\ln x$ 都位於 $|\cdot|$ 之內或被提升至偶數次冪，所以

$$\mathrm{F}(x^{-1}) = \ln|-\ln x| - (-\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(-\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} = \mathrm{F}(x),$$

得證。（兩邊的常數 $\frac{3}{4}$ 之所以相同，只因為兩個下限 e 和 e^{-1} 本身就是一對倒數。）

第 (ii) 部分

> **想一想** F 在哪裏遞增？在 $x = 1$ 附近會發生甚麼事？

斜率（gradient）。$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$。因子 $(1-u^2)^2$ 永不為負，且 $x > 0$，所以 $\mathrm{f}(x)$ 與 $u = \ln x$ 同號。因此 F 在 $(0,1)$ 上遞減，在 $(1,\infty)$ 上遞增。它僅有的駐點（stationary point）位於 $x = e^{-1}$ 及 $x = e$，而按定義在這兩點 $\mathrm{F} = 0$。

這兩點並非轉向點（turning point）。在 $x = e$ 附近，兩側的斜率都是正的；在 $x = e^{-1}$ 附近，兩側的斜率都是負的。由於 $\mathrm{f}' = \mathrm{F}''$ 在該處亦為零，它們是駐定拐點（stationary point of inflection）。由此可知

$$\mathrm{F}(x) > 0 \text{ 當 } 0 < x < e^{-1} \text{ 及 } x > e, \qquad \mathrm{F}(x) < 0 \text{ 當 } e^{-1} < x < 1 \text{ 及 } 1 < x < e.$$

兩端的行為。

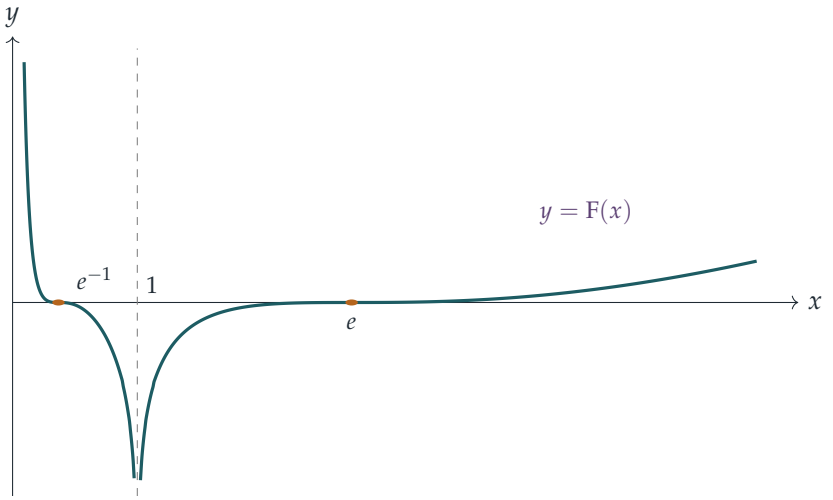
- 當 $x \to 1$ 時，$u \to 0$ 而 $\ln|u| \to -\infty$，其餘各項則趨向 $\frac{3}{4}$。所以從兩側都有 $\mathrm{F}(x) \to -\infty$，而 $x = 1$ 是一條垂直漸近線（vertical asymptote）。
- 當 $x \to \infty$ 時，$u \to \infty$，而 $\frac{1}{4}u^4$ 一項佔主導，所以 $\mathrm{F}(x) \to \infty$。不過增長非常緩慢：斜率 $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to 0$。
- 當 $x \to 0^+$ 時，$u \to -\infty$，所以由對稱性，同樣有 $\mathrm{F}(x) \to \infty$。這裏的變化十分陡峭：斜率 $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to -\infty$。曲線不與 y 軸相交。

凹性（concavity）（用於更仔細的草圖）。利用 $\mathrm{F}'' = \mathrm{f}' = (g' - g)/x^2$ 並化簡，

$$\mathrm{F}''(x) = -\frac{(u^2-1)(u^3-3u^2-u-1)}{u^2x^2}.$$

三次式 $u^3 - 3u^2 - u - 1$ 只有一個實根，位於 $u \approx 3.38$（它在 $u = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ 處的局部極大值為負）。對於所有較小的 u，它都是負的。所以曲線在 $(0, e^{-1})$ 上向上凹，在 $(e^{-1}, 1)$ 及 $(1, e)$ 上向下凹。從 e 開始曲線向上凹，直至在 $x \approx 29.5$ 處出現另一個拐點，之後向下凹。最後這個拐點遠在右方，草圖上不必畫出。

對稱性 $\mathrm{F}(x^{-1}) = \mathrm{F}(x)$ 表示在 x 處的高度與在 $1/x$ 處的高度相同。例如 $\mathrm{F}(2) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) \approx -0.04$ 及 $\mathrm{F}(5) = \mathrm{F}(\frac{1}{5}) \approx 0.31$。因此曲線在 $(1, \infty)$ 上的部分，就是 $(0, 1)$ 上的部分沿水平方向朝漸近線壓縮而成。



曲線在 y 軸附近從 $+\infty$ 陡峭地下降，然後逐漸平緩，在 $(e^{-1}, 0)$ 處的駐定拐點觸及 x 軸，接着急跌至漸近線 $x = 1$ 處的 $-\infty$。在右邊，曲線從 $-\infty$ 回升，在 $(e, 0)$ 處的第二個駐定拐點變得平坦，然後緩慢上升至 $+\infty$。

驗算

- 對方框內的公式求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right) = \mathrm{f}(x)$，而且公式在 $x = e$ 及 $x = e^{-1}$ 處的值都是 0。
- 數值上，$\int_e^5 \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$ 及 $\int_{1/e}^{1/5} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$，與公式及對稱性吻合。
- 正負號亦吻合：在 $(1, e)$ 上函數遞增至 0，所以在該處必為負，而事實上 $\mathrm{F}(2) \approx -0.039$。

常見錯誤

- 在 $0 < x < 1$ 時寫成 $\ln(\ln x)$，但此時 $\ln x < 0$。$\frac{1}{u}$ 的原函數是 $\ln|u|$，而正是這個絕對值令對稱性成立。
- 在 $x = e^{\pm 1}$ 處畫成轉向點。由於 f 含有平方因子，它在該處不變號，所以這些是駐定拐點。
- 遺漏 $x = 1$ 處的垂直漸近線，或把兩支曲線跨過漸近線連接起來。

STEP 之外

F 由積分定義，而微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）指出，在 f 連續的每個區間上都有 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$。這正是兩段定義需要各自的基點的原因：f 在 $x = 1$ 處趨向無窮，所以無法用單一個積分跨越該點。對稱變換 $x \mapsto x^{-1}$ 在 $u = \ln x$ 之下變成 $u \mapsto -u$，這是把乘法對稱轉化為加法對稱的一個小例子，而這個想法貫穿整個分析學。如欲仔細了解微積分基本定理及瑕積分（improper integral），可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。