詳細解答

STEP I 2018，第 3 題

純數學 • 角與雙曲線

> **STEP I 2018，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q3

關鍵思路

兩個角都可以透過正切（tangent）與 P 的坐標聯繫起來：RP 的斜率給出 $\tan\alpha$，SP 的斜率給出 $\tan\beta$。於是條件 $\beta = 2\alpha$ 就變成 tan 的二倍角恆等式（double-angle identity），消去分母後便得到該曲線。第 (ii) 部分則把同樣的代數步驟倒過來進行。難點在於：知道 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 只能確定 β 至相差 π 的整數倍，因此我們必須留意 2α 位於哪一個象限（quadrant）。

解答

設定兩個角

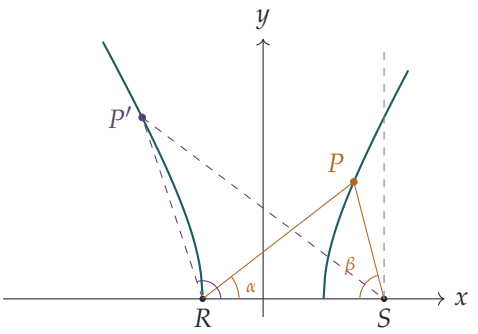
由於 $y > 0$，在 R 處的角 α 是由正 x 方向（沿 RS）轉到 RP 量度的，所以 $0 < \alpha < \pi$，而且

$$\tan\alpha = \frac{y}{x+a} \qquad (x \neq -a).$$

無論 P 在 R 的右方（α 為銳角，正切為正）還是左方（α 為鈍角，正切為負），此式都成立。在 S 處，角 β 是由負 x 方向（沿 SR）量度到 SP 的。因為 $x < 2a$，點 P 在 S 的左方，所以 β 為銳角，而且

$$\tan\beta = \frac{y}{2a-x} > 0, \qquad 0 < \beta < \tfrac{\pi}{2}.$$

當 $x \neq -a$ 時，記 $t = \tan\alpha$。



曲線 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$ 在 $y > 0$、$x < 2a$ 的部分（圖中取 $a = 1$）由兩段組成：右支上 $a < x < 2a$ 的一段弧，以及整條左支的上半部分 $x < -a$。左支上的點 P' 會令 α 成為鈍角。

第 (i) 部分

設 $\beta = 2\alpha$。由於 $\beta < \frac{\pi}{2}$，我們有 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$，故 $x > -a$、$0 < t < 1$，而且在 $1 - t^2 \neq 0$ 的情況下可以使用二倍角公式：

$$\frac{y}{2a - x} = \tan 2\alpha = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2y/(x + a)}{1 - y^2/(x + a)^2} = \frac{2y(x + a)}{(x + a)^2 - y^2}.$$

消去 y（因 $y > 0$，這是容許的），再交叉相乘：

$$\begin{aligned}(x + a)^2 - y^2 &= 2(x + a)(2a - x)\\ \iff \quad y^2 &= (x + a)\big[(x + a) - 2(2a - x)\big] = (x + a)(3x - 3a) = 3(x^2 - a^2).\end{aligned}$$

所以 P 位於 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$ 上，得證。

第 (ii) 部分

現在設 P 位於該曲線上，且 $y > 0$、$x < 2a$。於是 $x^2 - a^2 = \frac{1}{3}y^2 > 0$，故 $|x| > a$：即 $a < x < 2a$ 或 $x < -a$。特別地，$x \neq -a$，所以 $t = \tan\alpha$ 有定義，而且 $t \neq 0$。

第 (i) 部分的步驟可以倒推。曲線方程等價於 $(x + a)^2 - y^2 = 2(x + a)(2a - x)$。兩邊除以 $(x + a)^2$，並利用 $2a - x = y/\tan\beta$，得

$$1 - t^2 = \frac{2(2a - x)}{x + a} = \frac{2y}{(x + a)\tan\beta} = \frac{2t}{\tan\beta}, \qquad \text{故} \qquad (1 - t^2)\tan\beta = 2t.$$

若 $t^2 = 1$，此式會給出 $t = 0$，這是不可能的；所以 $t^2 \neq 1$，而且

$$\tan\beta = \frac{2t}{1 - t^2} = \tan 2\alpha.$$

想一想 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 是否意味着 $\beta = 2\alpha$？

不一定：它只表示 β 與 2α 相差 π 的整數倍。我們利用已知的角的大小範圍，按曲線的兩段分情況討論。

情況 $a < x < 2a$。此時 $x + a > 0$，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，且 $0 < 2\alpha < \pi$。由於 $\tan 2\alpha = \tan\beta > 0$，$2\alpha$ 位於 $(0, \frac{\pi}{2})$，與 β 在同一區間。由於 tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是一一對應（one-to-one）的，

$$\beta = 2\alpha.$$

情況 $x < -a$。此時 $x + a < 0$，所以 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，且 $\pi < 2\alpha < 2\pi$。由於 $\tan 2\alpha > 0$，$2\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$，故 $2\alpha - \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$，且 $\tan(2\alpha - \pi) = \tan 2\alpha = \tan\beta$。同前，tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是一一對應的，所以

$$\beta = 2\alpha - \pi.$$

因此可能的關係是 $\beta = 2\alpha$（當 P 在右支上）和 $\beta = 2\alpha - \pi$（當 P 在左支上）。兩者都會出現，因為每一段上的每一點都滿足所給條件。

驗算

- 取 $a = 1$ 及 $P = (-2, 3)$，由於 $3(4-1) = 9$，此點在曲線上。於是 $\tan\alpha = 3/(-1) = -3$，故 $\alpha \approx 108.43°$；又 $\tan\beta = \frac{3}{4}$，故 $\beta \approx 36.87°$。確實 $2\alpha - 180° \approx 36.87°$。
- 在右支上當 $x \to 2a$ 時，$y \to 3a$，所以 $\tan\alpha \to 1$ 而 $\tan\beta \to \infty$：$\alpha \to \frac{\pi}{4}$，$\beta \to \frac{\pi}{2} = 2\alpha$。
- 在左支上遠離原點時，P 趨近漸近線（asymptote）$y = -\sqrt{3}\,x$，所以 $\alpha \to \frac{2\pi}{3}$，$\beta \to \frac{\pi}{3} = 2\alpha - \pi$。

我們亦以電腦在每一支上的大量隨機點、並取隨機的 a，驗證了這兩個關係，結果一致。

常見錯誤

- 寫成 $\tan\alpha = y/|x + a|$，或假設 α 為銳角。在左支上 α 是鈍角，且 $\tan\alpha < 0$。
- 未檢查角的範圍，便由 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 斷定 $\beta = 2\alpha$。這樣會漏掉第二個關係。
- 忘記 $x < 2a$ 和 $y > 0$ 把曲線限制為兩段，以及需要 $|x| > a$ 來排除 $x = -a$。

STEP 之外

這條曲線是一條離心率（eccentricity）為 2、焦點（focus）為 S、準線（directrix）為 $x = \frac{a}{2}$ 的雙曲線（hyperbola）。第 (i) 部分的性質給出了利用雙曲線三等分角（trisect an angle）的經典方法（帕普斯（Pappus）已知曉），從而繞過了僅用尺規不能三等分角這一不可能性。這個不可能性的證明本身，是域論（field theory）入門課程的亮點之一。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）涵蓋了這部分內容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）則是探討角與圓錐曲線幾何的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。