詳細解答

STEP I 2018，第 2 題

純數學 • 對數不等式

> **STEP I 2018，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q2

關鍵思路

一切都建基於換底公式（change-of-base rule）：任何底數的對數（logarithm）都可以寫成同一底數下兩個對數之比，而且 $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$。只要把每個對數都改寫成以 ln 表示，每一部分就變成一小段涉及不等式（inequality）的代數運算。題目給出的事實，例如 $e^2 < 8$，其實只是 $\ln 2$ 和 $\ln 10$ 的界的另一種寫法。整個過程中，我們都會用到 ln 是遞增（increasing）函數這一事實，因此對兩個正數之間的不等式取對數，不等號的方向保持不變。

解答

開首的結果

根據對數的定義，$x = \log_b c$ 的意思是

$$c = b^x.$$

兩邊取以 a 為底的對數，並利用 $\log_a(b^x) = x \log_a b$，得

$$\log_a c = x \log_a b.$$

由於 $b \neq 1$（否則 $\log_b$ 沒有意義），所以 $\log_a b \neq 0$，可以相除：

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = x = \log_b c,$$

得證。下文會用到兩個推論。取 $a = c$ 得 $\log_b c = \dfrac{1}{\log_c b}$；取 $a = e$ 得 $\log_b c = \dfrac{\ln c}{\ln b}$。

第 (i) 部分

根據倒數（reciprocal）法則，$\dfrac{1}{\log_2 \pi} = \log_\pi 2$ 及 $\dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 5$。所以

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10.$$

由於 $\pi > 1$，函數 $\log_\pi$ 是遞增的，而 $10 > \pi^2$，因此

$$\log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2,$$

這正是所求的不等式。

第 (ii) 部分

把第一個已知事實改寫成自然對數（natural logarithm）：

$$\log_2 \frac{\pi}{\mathrm{e}} = \frac{\ln \pi - 1}{\ln 2} > \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \ln \pi > 1 + \frac{\ln 2}{5},$$

這裏我們乘以 $\ln 2 > 0$，所以不等號方向不變。

> **想一想** $\mathrm{e}^2 < 8$ 告訴我們甚麼？

它是 $\ln 2$ 的一個下界（lower bound）。兩邊取 ln（由於 ln 是遞增的，這樣做是容許的），得 $2 < \ln 8 = 3 \ln 2$，所以 $\ln 2 > \frac{2}{3}$。代入，得

$$\ln \pi > 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{15} = \frac{17}{15},$$

得證。

第 (iii) 部分

由 $\pi^2 < 10$，取對數得 $2 \ln \pi < \ln 10$。所以只需證明 $\ln 10 < \frac{30}{13}$。

把另外兩個事實改寫。由於 $\mathrm{e}^3 > 20$，我們有 $3 > \ln 20 = \ln 2 + \ln 10$，即

$$\ln 2 < 3 - \ln 10.$$

此外，$\log_{10} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10} > \dfrac{3}{10}$，而由於 $\ln 10 > 0$，

$$\ln 10 < \frac{10}{3} \ln 2.$$

第一式是 $\ln 2$ 的一個上界（upper bound），而 $\ln 2$ 在第二式中的係數（coefficient）是正數，所以可以把它代入：

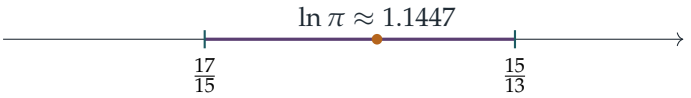
$$\ln 10 < \frac{10}{3} (3 - \ln 10) = 10 - \frac{10}{3} \ln 10.$$

合併 $\ln 10$ 的項，得 $\frac{13}{3}\ln 10 < 10$，所以 $\ln 10 < \frac{30}{13}$。因此

$$\ln \pi < \tfrac{1}{2}\ln 10 < \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{30}{13} = \frac{15}{13},$$

得證。

第 (ii) 和第 (iii) 部分合起來，把 $\ln \pi$ 困在一個狹窄的區間（interval）之內：



驗算

以數值計算，$\ln \pi \approx 1.1447$，確實介乎 $\frac{17}{15} \approx 1.1333$ 與 $\frac{15}{13} \approx 1.1538$ 之間。在第 (i) 部分，$\log_\pi 10 \approx 2.0115$，只是稍稍大於 2，這與 $\pi^2 \approx 9.87$ 非常接近 10 的情況吻合。與 $\ln 10 \approx 2.3026$ 比較，界 $\ln 10 < \frac{30}{13} \approx 2.3077$ 也是成立的。題目給出的事實也值得核實一下：$\log_2(\pi/\mathrm{e}) \approx 0.209$、$\mathrm{e}^2 \approx 7.39$、$\mathrm{e}^3 \approx 20.09$ 及 $\log_{10} 2 \approx 0.3010$。

常見錯誤

- 把 $\dfrac{1}{\log_2 \pi}$ 寫成 $\log_2 \frac{1}{\pi}$。取倒數是把底數和真數互換，而不是把真數取倒數。
- 在第 (iii) 部分，在需要 $\ln 2$ 的上界時錯用了下界。只有當每個界都指向同一方向時，才可以把不等式串連起來。
- 在不等式兩邊相乘或取對數之前，忘記說明 $\ln 2$、$\ln 10$ 和 $\log_\pi$ 的性質良好（為正數，或是遞增的）。

STEP 之外

從寥寥幾個粗略的事實推導出數值上的界，讓我們稍稍體會到分析學家如何估計常數：分析（analysis）的很大一部分，就是把一個未知的量困在兩個你能掌握的估計之間。$\ln 2$ 或 π 更精確的界來自級數（series）和積分不等式，例如用矩形來估計 $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是引導讀者進入這種思考方式的一本親切入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。