詳細解答

STEP I 2018，第 13 題

概率與統計 • 二項分佈與貝葉斯定理

STEP I 2018，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s1-q13

關鍵思路

一切都建基於一個簡單的計算：若考生作答 k 題，其中答對 j 題，則得分為 $2j-(k-j)=3j-k$。因此合格即表示至少答對 $(k+5)/3$ 題，而對每個 k，這就準確告訴我們要把哪些二項式項相加。在第 (iii) 部分，巧妙的做法是把每一題看成有三種結果（答對、答錯、未作答），這樣整個問題就化為單一的多項計數（multinomial count）。

解答

全文設 $p=\frac{1}{n}$ 為隨機選出的答案正確的概率(probability)，並設 $q=1-p$。由於 $n\geq 2$，故 $0<p\leq\frac{1}{2}$。

第 (i) 部分

設 P_k 為 A 恰好作答 k 題時合格的概率。她的各次選擇互相獨立（independent），所以她答對的題數 J 服從二項分佈（binomial distribution）$\mathrm{B}(k,p)$。她的得分為 $3J-k$，所以她合格當且僅當

$$3J-k\geq 5 \iff J\geq\frac{k+5}{3}.$$

逐一考慮 k 的各個值：

- $k=0,1,2$：分別需要 $J\geq\frac{5}{3},2,\frac{7}{3}$，即 $J\geq 2$、$J\geq 2$ 及 $J\geq 3$，但 $J\leq k$，故這些都不可能（最高得分為 $2k\leq 4$）。所以 $P_0=P_1=P_2=0$。
- $k=3$：需要 $J\geq\frac{8}{3}$，即 $J=3$，所以 $P_3=p^3$。

► $k = 4$：需要 $J \geq 3$，所以

$$P_4 = \binom{4}{3} p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p).$$

► $k = 5$：需要 $J \geq \frac{10}{3}$，即 $J = 4$ 或 5，所以

$$P_5 = \binom{5}{4} p^4 q + p^5 = 5p^4(1-p) + p^5 = p^4(5-4p).$$

現在把 P_4 與它的兩個對手比較。由於 $p < 1$，有 $4 - 3p > 1$，所以 $P_4 > p^3 = P_3$。此外

$$P_4 - P_5 = p^3\big[(4-3p) - p(5-4p)\big] = p^3\big(4p^2 - 8p + 4\big) = 4p^3(1-p)^2 > 0,$$

因為 $0 < p < 1$。又因 $P_4 > 0$，亦勝過 $P_0 = P_1 = P_2 = 0$，所以 P_4 嚴格最大，故 A 應選擇 $k = 4$，得證。

想一想 作答全部五題，豈不是必然有更多得分機會？

在這裏並非如此。作答五題時，她需要答對四題，因為第五題一旦答錯便會扣一分，而答錯的機會遠比答對大。作答四題時，答對三題便已足夠。因式分解（factorisation）$4p^3(1-p)^2$ 顯示，這個優勢對每個 $n \geq 2$ 都成立，而不僅限於 n 很大的情況。

第 (ii) 部分

設 K 為 B 作答的題數，所以對 $k = 0, \ldots, 5$ 有 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{6}$；並設 S 為 B 合格這一事件。在 $K = k$ 的條件下，B 的處境與 A 完全相同，所以 $\mathrm{P}(S \mid K = k) = P_k$。由貝葉斯定理（Bayes' theorem），

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{\frac{1}{6}P_4}{\frac{1}{6}(P_0 + P_1 + \cdots + P_5)} = \frac{p^3(4-3p)}{p^3 + p^3(4-3p) + p^4(5-4p)}.$$

約去 p^3（它不為零）後，分母變為 $1 + 4 - 3p + 5p - 4p^2 = 5 + 2p - 4p^2$，所以

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{4-3p}{5+2p-4p^2}.$$

代入 $p = \frac{1}{n}$，並把分子和分母同乘以 n^2：

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{4n^2 - 3n}{5n^2 + 2n - 4} = \frac{n(4n-3)}{5n^2 + 2n - 4}.$$

第 (iii) 部分

對每一題而言，C 擲硬幣的結果與她所選的答案互相獨立，亦與其他題目的情況獨立。所以每一題各自獨立地有三種結果之一：

$$\begin{aligned}
\text{答對 } (+2): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1},\\
\text{答錯 } (-1): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n+1},\\
\text{未作答 } (0): &\quad \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

設她答對 c 題、答錯 w 題，其中 $c+w\le 5$。她合格當 $2c-w\ge 5$。這迫使 $c\ge 3$，然後：

- $c=3$：需要 $w\le 1$；
- $c=4$：由於 $c+w\le 5$，$w\le 1$ 自動成立；
- $c=5$：$w=0$。

把 c 題答對、w 題答錯、$5-c-w$ 題未作答分配到各題的方法數，就是多項係數（multinomial coefficient）$\frac{5!}{c!\,w!\,(5-c-w)!}$。由於答對與未作答的概率同為 $\frac{1}{n+1}$，每一種排列的概率都是 $\dfrac{(n-1)^w}{(n+1)^5}$。把五種情況相加：

(c,w)	排列數	概率 $\times(n+1)^5$
$(3,0)$	10	10
$(3,1)$	20	$20(n-1)$
$(4,0)$	5	5
$(4,1)$	5	$5(n-1)$
$(5,0)$	1	1

總和為 $16+25(n-1)=25n-9$，所以

$$\mathrm{P}(\text{C 合格}) = \frac{25n-9}{(n+1)^5}.$$

驗算

- 當 $n=2$：$P_3=\frac{1}{8}$，$P_4=\frac{5}{16}$，$P_5=\frac{3}{16}$，所以 $k=4$ 勝出。在 (ii) 中，公式給出 $\frac{2\cdot 5}{20}=\frac{1}{2}$，與直接計算 $\frac{5/16}{10/16}$ 的結果吻合。
- 對於 (iii)，當 $n=3$ 時答案為 $\frac{66}{1024}\approx 0.0645$，而以電腦模擬 200 000 次測驗得出 0.0644。三條公式亦與電腦對 $n=2,\ldots,29$ 作精確窮舉的結果一致。

- 當 $n \to \infty$，(ii) 的答案趨向 $\frac{4}{5}$：當猜題幾乎毫無希望時，合格幾乎總是來自作答四題（需答對三題），而非作答五題（需答對四題）或作答三題（需三題全對，概率為 p^3，遠小於 $4p^3$）。

常見錯誤

- 忘記作答五題時答對三題只得 $6 - 2 = 4$ 分，並不合格：需要答對四題。
- 在 (ii) 中，分母漏了 P_3：作答三題而三題全對，也是合格的一種途徑。
- 在 (iii) 中，把問題看成「以概率 $\binom{5}{k}h^k(1-h)^{5-k}$ 作答 k 題」，然後套用第 (i) 部分，這樣做是可行的，但很容易漏掉某一項；三種結果的計數方法較為簡潔。

STEP 之外

第 (iii) 部分是*稀疏化*（thinning）的一個例子：每一題以某個概率被保留，而各結果仍然互相獨立，所以答對、答錯及跳過的題數服從多項分佈（multinomial distribution）。第 (ii) 部分則是貝葉斯更新（Bayesian updating），這是現代統計學很大部分背後的思想。兩者在 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率論導引》）以及 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率論入門》）中都有深入闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。