詳細解答

STEP I 2018，第 11 題

力學 • 斜面上的摩擦力

STEP I 2018，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s1-q11

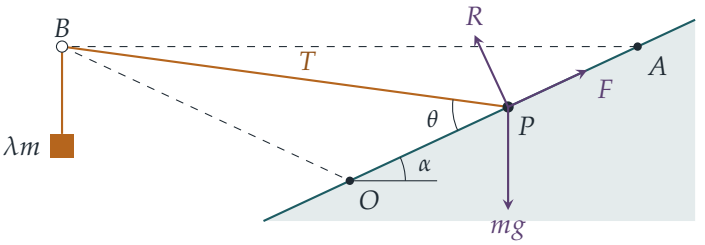
關鍵思路

先從幾何入手：$OA = OB = d$，所以三角形 OAB 是等腰三角形（isosceles triangle）；又因為 AB 是水平的，它的兩個底角都是 α。繩子由 P 往回越過 O 的一側伸向 B，因此它一方面把 P 沿斜面向下拉，另一方面把 P 拉離斜面。於是摩擦力（friction）必須把質點托住，而法向反作用力（normal reaction）則因張力（tension）而減小。每個平衡（equilibrium）條件都是一條關於 θ 的不等式，而且必須對第 (i) 部分所得範圍內的每一個 θ 都成立，所以我們要找出最不利的位置。

解答

把 P 和懸掛的物體視為質點（particle），繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），滑輪視為光滑（smooth），因此整條繩子的張力處處相同。懸掛的質點處於平衡，所以

$$T = \lambda mg.$$



第 (i) 部分

把 O 放在原點，x 軸取水平方向。於是 $A = (d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$。點 B 與 A 等高，且與 O 的距離為 d，所以 $B = (\pm d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$。取正號得到的就是 A 本身，因此

$$B = (-d\cos\alpha,\ d\sin\alpha).$$

此點位於斜面所在直線的上方，並在 O 相對於 A 的另一側。在三角形 OAB 中，$OA = OB = d$；又因為 AB 水平而 AO 與水平線成角 α，所以 $\angle OAB = \alpha$。因此 $\angle OBA = \alpha$ 亦成立，而 $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$；由於 $\alpha < 45^\circ$，這是一個鈍角。

設 P 位於 OA 上。繩子沿 PB 伸展，它與 L 所成的銳角為 $\theta = \angle BPO$。這個角是銳角，因為它至多是 $2\alpha < 90^\circ$，下面就來證明。它是三角形 PAB 的一個外角（exterior angle），所以

$$\theta = \angle BPO = \angle PAB + \angle PBA = \alpha + \angle PBA.$$

當 P 由 O 移向 A 時，射線 BP 由 BO 轉向 BA，所以 $\angle PBA$ 由 $\angle OBA = \alpha$ 遞減至 0。因此

$$\alpha \le \theta \le 2\alpha,$$

當 P 在 O 時 $\theta = 2\alpha$，而當 P 趨近 A 時 $\theta \to \alpha$。

留意這對各力意味着甚麼。從沿斜面向下的方向 PO 量起，繩子成銳角 θ，並指向離開斜面的一方。所以張力有沿斜面向下的分量 $T\cos\theta$，以及垂直於斜面、把 P 拉離斜面的分量 $T\sin\theta$。

第 (ii) 部分

沿垂直於斜面的方向分解（resolving）：

$$R = mg\cos\alpha - T\sin\theta = mg(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

> ? **想一想** 在這一部分中，既然我們不知道 μ，摩擦力去了哪裏？

我們根本不需要它。無論 μ 是多少，P 都必須與斜面保持接觸，所以需要 $R \ge 0$。（事實上 $R > 0$：若 $R = 0$，就沒有摩擦力，沿斜面方向便沒有任何力可以平衡 $mg\sin\alpha + T\cos\theta > 0$。）因此，要在每一點都能平衡，必須有

$$\lambda\sin\theta \le \cos\alpha \quad \text{對所有出現的} \theta \text{ 成立.}$$

由於 sin 在 $[\alpha, 2\alpha] \subset [0^\circ, 90^\circ)$ 上遞增，$\sin\theta$ 的最大值出現在 $\theta = 2\alpha$（或當 P 趨近 O 時任意接近它）。因此 $\lambda\sin 2\alpha \le \cos\alpha$，即 $2\lambda\sin\alpha\cos\alpha \le \cos\alpha$。兩邊除以 $\cos\alpha > 0$，得

$$2\lambda\sin\alpha \le 1,$$

即為所求。

第 (iii) 部分

重力和張力都把 P 沿斜面向下拉，所以摩擦力 F 沿斜面向上作用。沿斜面方向分解，

$$F = mg\sin\alpha + T\cos\theta = mg(\sin\alpha + \lambda\cos\theta).$$

在此位置能夠平衡，當且僅當 $F \le \mu R$（由於 $F > 0$，這同時迫使 $R > 0$）。設 $\mu = \tan\beta$，條件為

$$\sin\alpha + \lambda\cos\theta \le \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

兩邊乘以 $\cos\beta > 0$，並把含 λ 的項歸在一起：

$$\lambda(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \le \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$
$$\lambda\cos(\beta - \theta) \le \sin(\beta - \alpha).$$

這裏 $0 < \beta < 90^\circ$ 且 $0 < \theta \le 2\alpha < 90^\circ$，所以 $-90^\circ < \beta - \theta < 90^\circ$，從而 $\cos(\beta - \theta) > 0$。因此，在角度為 θ 的位置能夠平衡，恰好當

$$\lambda \le \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \theta)}.$$

要使此式在每一個位置都成立，它必須在 $\cos(\beta - \theta)$ 最大之處成立，也就是在範圍 $\alpha \le \theta \le 2\alpha$ 容許下 θ 最接近 β 之處。

情況 $\beta \ge 2\alpha$。範圍內每一個 θ 都不超過 β，所以 $0 \le \beta - 2\alpha \le \beta - \theta \le \beta - \alpha < 90^\circ$。餘弦在 $[0^\circ, 90^\circ)$ 上遞減，所以 $\cos(\beta - \theta)$ 在 $\theta = 2\alpha$ 處最大，即位於 O（或緊鄰 O）的位置。因此一個必要條件是

$$\lambda \le \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - 2\alpha)}.$$

這也是充分條件，因為在其他每一個位置，對 λ 的限制都較寬鬆。

情況 $\alpha \le \beta \le 2\alpha$。此時 $\theta = \beta$ 落在範圍之內：由第 (i) 部分，P 在 L 上介於 O 與 A 之間的某個位置恰好給出這個角（若 $\beta = \alpha$，則是當 $P \to A$ 時趨近）。在那裏 $\cos(\beta - \theta) = 1$，即其最大可能值，條件變為

$$\lambda \le \sin(\beta - \alpha).$$

在該位置，繩子垂直於總接觸力；當摩擦力達到極限時，總接觸力與法線成角 β。若 $\beta = \alpha$，這迫使 $\lambda = 0$：此時質點單憑自身重量就已剛好處於極限平衡（limiting equilibrium），任何繩子張力都會令它滑動。

驗算

► 當 $\beta = 2\alpha$ 時兩個答案一致：此時 $\cos(\beta - 2\alpha) = 1$，兩者都給出 $\lambda \le \sin\alpha$。

- 當 $\lambda = 0$ 時，條件變為 $\sin(\beta - \alpha) \geq 0$，即 $\mu \geq \tan\alpha$，這正是物塊能靜止於粗糙斜面上的熟悉條件。
- 對於 $\alpha = 20°$、$\beta = 50°$，界限為 $\sin 30° / \cos 10° \approx 0.508$。一項電腦驗算把 P 放在 OA 上的許多點，直接分解各力，結果發現對於數以千計的隨機 α 和 β，使各處皆能平衡的最大 λ 都與兩條公式吻合。它亦證實了 $\alpha \leq \theta \leq 2\alpha$。

常見錯誤

- 把 B 放在 O 與 A 同一側。由於 $OB = OA$ 而 $B \neq A$，B 位於 O 的另一側，所以張力把 P 沿斜面向下拉，而不是向上。
- 忘記張力會減小法向反作用力，從而減少可用的摩擦力。
- 在第 (iii) 部分的第二種情況中只檢查兩端的位置。最不利的位置是 $\theta = \beta$ 之處，它位於內部。

STEP 之外

組合式 $\lambda\cos(\beta - \theta) \leq \sin(\beta - \alpha)$ 是*摩擦角*（angle of friction）的代數形式：總接觸力必須落在與法線成角 β 的範圍之內，即所謂的摩擦錐（cone of friction）。只要從這個錐的角度思考，許多摩擦問題都能化為一行幾何。要求「對每一個位置」都能平衡，其實是一個小型的最優化問題；工程師按最壞情況進行設計時，也是用同樣的方式推理。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）細緻地處理摩擦力和受力圖，並附有大量具挑戰性的習題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。