詳細解答

STEP I 2018，第 10 題

力學 • 連接質點

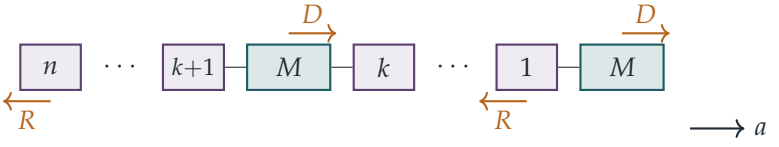
> **STEP I 2018，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q10

關鍵思路

每節車輛的加速度（acceleration）都相同，所以我們先由整列火車求出加速度一次，再對火車中最方便的那一部分應用牛頓第二定律（Newton's second law）：在某個連接器（coupling）處把火車「切開」，該連接器的張力（tension）就會顯露為一個外力（external force）。令後面各部分變得容易的技巧，是用兩種方法求最前方的張力 T：一次從前方機車入手，一次從它後面的所有車輛入手。這樣做會把 T 與單一個量 $R+ma$ 聯繫起來，而這個量同時支配著其他每一個連接器。

解答

模型。 把每輛機車和每節車廂視為沿水平路軌運動的質點（particle），並把連接器視為可以受拉或受壓（compression）的輕桿（light rods）。機車不受阻力（resistance），而每節車輛所受的鉛垂方向的力互相平衡，所以只需考慮水平方向的力。加速度 a 以運動方向為正。由前至後把車廂編號為 $1,2,\ldots,n$，使車廂 $1,\ldots,k$ 位於兩輛機車之間，而 $k+1,\ldots,n$ 位於第二輛機車之後（其中 $1\le k\le n-1$）。



（每節車廂都受一個向後的阻力 R；圖中只畫出其中兩個。）

加速度。 整列火車的質量為 $nm+2M$，而連接器的力屬於內力，所以

$$(nm+2M)a = 2D - nR, \qquad a = \frac{2D-nR}{nm+2M} > 0,$$

由於 $2D > nR$，所以加速度為正。特別地，$R+ma>0$，這個事實我們會反覆用到。

第 (i) 部分

前方機車受向前的力 D，以及其連接器向後的張力 T，所以

$$D - T = Ma.$$

因此

$$\begin{aligned} T = D - \frac{M(2D-nR)}{nm+2M} &= \frac{D(nm+2M) - 2MD + nMR}{nm+2M} \\ &= \frac{n(mD+MR)}{nm+2M}, \end{aligned}$$

即為所求。

T 的一個更簡潔形式。 現在改為考慮前方機車後面的所有車輛：一輛機車和 n 節車廂，總質量為 $M+nm$。它們受 T 和第二輛機車的 D 向前拉動，並受阻力 nR：

$$T + D - nR = (M+nm)a.$$

從此式減去 $D - T = Ma$ 便可消去 D：

$$2T - nR = nma, \qquad \text{所以} \qquad T = \tfrac{1}{2}n\,(R+ma).$$

第 (ii) 部分

除最前方的連接器外，其他每個連接器都屬於以下兩類之一。

第二輛機車前面的連接器。 對於 $1 \le j \le k$，設 T_j 為緊接車廂 j 後方的連接器的張力（因此 T_k 是車廂 k 與第二輛機車之間的連接器）。前方機車連同車廂 $1,\dots,j$ 的質量為 $M+jm$，並受 T_j 向後拉：

$$D - jR - T_j = (M+jm)a \quad\Longrightarrow\quad T_j = (D-Ma) - j(R+ma) = T - j(R+ma).$$

由於 $R+ma>0$ 且 $j \ge 1$，無論 k 是多少，這類連接器全部都有 $T_j < T$。

第二輛機車後面的連接器。 對於 $k+1 \le j \le n$，設 S_j 為緊接車廂 j 前方的連接器的張力。最簡單的做法是考慮它後面的車輛：車廂 $j,\dots,n$，共 $n-j+1$ 節，只受 S_j 向前拉：

$$S_j - (n-j+1)R = (n-j+1)ma \quad\Longrightarrow\quad S_j = (n-j+1)(R+ma).$$

想一想 這些後方連接器中，哪一個的張力最大？它與 T 相比又如何？

張力 S_j 隨 j 增大而減小，所以最大的是 $S_{k+1} = (n-k)(R+ma)$，位於緊接第二輛機車後方的連接器。將它與 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$ 比較，並除以 $R+ma > 0$，得

$$S_{k+1} < T \iff n-k < \tfrac{1}{2}n \iff k > \tfrac{1}{2}n.$$

所以若 $k > \frac{1}{2}n$，每個後方連接器的張力至多為 $S_{k+1} < T$，而每個前方連接器都有 $T_j < T$。因此 T 大於其他任何連接器的張力，即為所求。（這個條件也是必要的：若 $k \le \frac{1}{2}n$，則 $S_{k+1} \ge T$。）

第 (iii) 部分

考慮車廂 k 與第二輛機車之間的連接器。由第 (ii) 部分及 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$，

$$T_k = T - k(R+ma) = \left(\tfrac{1}{2}n - k\right)(R+ma).$$

若 $k > \frac{1}{2}n$，第一個因子為負而第二個因子為正，所以 $T_k < 0$：這個連接器處於受壓狀態。從物理角度看，第二輛機車正在推動它前面的 k 節車廂（超過整列火車的一半），同時前方機車在拉動它們。

驗算

- 取 $n=5$、$k=3$、$M=10$、$m=2$、$D=20$、$R=1$。則 $a = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$，公式給出 $T = \frac{5(40+10)}{30} = \frac{25}{3}$，與 $D - Ma = 20 - \frac{35}{3}$ 相符。沿火車由前往後，各張力依次為 $\frac{25}{3}, 5, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$（車廂 3 至機車），然後是 $\frac{20}{3}, \frac{10}{3}$。所以 T 最大，而且恰好有一個連接器受壓，與預測一致。
- 若 $M=0$，機車就只是力，此時 $T = D$，這正是無質量的前方機車應有的結果。
- 每個張力都是一個力乘以一個無量綱（dimensionless）比值，所以單位正確。

常見錯誤

- 把阻力也加在機車上：題目只說車廂受阻力。
- 忘記第二輛機車的驅動力作用於任何包含它的火車部分。
- 假設每個連接器都必定受拉；連接器是一根桿，所以負張力是完全合乎物理的推力。

STEP 之外

把一個系統分拆成若干部分，並為每一部分分別畫出受力圖（free-body diagram），其中內力（internal forces）以大小相等、方向相反的成對形式出現，這是連接體力學的基礎。在大學一年級的課程中，這會發展為桁架（truss）和框架（framework）的分析：你要同時求出多根構件的內力，而有些構件會原來是受壓的支柱（strut），而不是受拉的拉桿（tie）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）細緻地討論了受力圖和牛頓第三定律（Newton's third law）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。