詳細解答

STEP I 2018，第 1 題

純數學 • 曲線之間的面積

> **STEP I 2018，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q1

關鍵思路

令三次曲線（cubic）與直線相等，會先得到因式 x，餘下的是一個平方差（difference of two squares），因此三個交點都能乾淨利落地求出。之後的一切都是常規的微積分運算，而代換（substitution）$c = b - a$（即 P 的 x 坐標）能令代數運算保持整潔。最後的不等式乍看令人生畏，但只要把兩個面積都以 c 表示，它便簡化為 $b > a$。

解答

交點與草圖

在交點處，$x(b-x)^2 = a^2x$，所以 $x = 0$（即原點），或

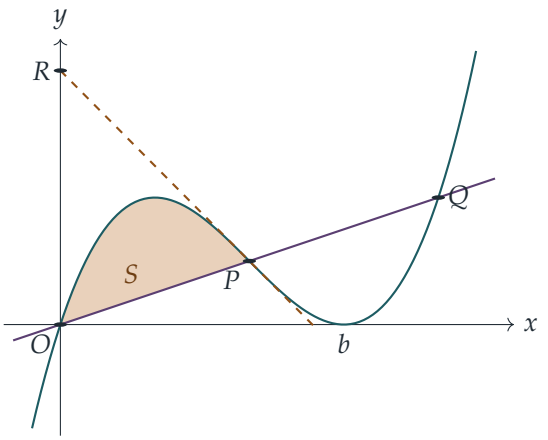
$$(b-x)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad b - x = \pm a \quad \Longrightarrow \quad x = b - a \text{ 或 } x = b + a.$$

由於 $a > 0$，$b - a < b + a$，所以

$$P = (b-a,\ a^2(b-a)), \qquad Q = (b+a,\ a^2(b+a)).$$

因為 $0 < a < b$，兩點都位於第一象限（first quadrant）。

至於草圖：三次曲線 $y = x(b-x)^2$ 在 O 有一個單根，在 $x = b$ 有一個重根（repeated root），曲線在該處與 x 軸相切。當 $x < 0$ 時曲線為負，當 $x > 0$ 時曲線為正（$x = b$ 除外），而當 $x \to \infty$ 時曲線趨向 $+\infty$。其導數（見下文）為 $(b-x)(b-3x)$，所以曲線在 $x = b/3$ 有局部極大值（local maximum），在 $(b, 0)$ 有局部極小值（local minimum）。經過 O 的直線在 O 附近切過上升的一段，再在 P 相交（當 $a < \frac{2}{3}b$ 時 P 位於 $b/3$ 與 b 之間，否則位於 $b/3$ 之前），然後在切點 $x = b$ 之後的 Q 第三次與曲線相交。圖中取 $a = 1$、$b = 3$；圖中亦顯示了 P 處的切線、點 R 以及面積為 S 的區域。



P 處的切線

以乘積法則（product rule）求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (b-x)^2 - 2x(b-x) = (b-x)(b-3x).$$

在 P，$x = b-a$，所以 $b-x = a$，$b-3x = 3a-2b$。該處的斜率（gradient）為 $m = a(3a-2b)$。

切線（tangent）為 $y = mx+k$，其中 k 的取值須令直線經過 P：

$$\begin{aligned} k &= a^2(b-a) - a(3a-2b)(b-a) \\ &= a(b-a)(a-3a+2b) \\ &= 2a(b-a)^2. \end{aligned}$$

因此 P 處的切線為 $y = a(3a-2b)x + 2a(b-a)^2$，與所求相符。特別地，$R = (0,\, 2a(b-a)^2)$，位於 y 軸的正半軸上。

面積 S

記 $c = b-a > 0$ 為 P 的 x 坐標。在 $0 < x < c$ 上，

$$x(b-x)^2 - a^2x = x\,(b-x-a)(b-x+a) > 0,$$

因為三個因式在該區間上都是正數。所以在 O 與 P 之間曲線位於直線之上，而

$$S = \int_0^c (x(b-x)^2 - a^2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^c ((b^2-a^2)x - 2bx^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{(b^2-a^2)c^2}{2} - \frac{2bc^3}{3} + \frac{c^4}{4}.$$

現代入 $b^2-a^2=c(b+a)=c(c+2a)$ 及 $b=c+a$：

$$\begin{aligned}S&=\frac{c^3(c+2a)}{2}-\frac{2c^3(c+a)}{3}+\frac{c^4}{4}\\&=c^3\Big[c(\tfrac12-\tfrac23+\tfrac14)+a(1-\tfrac23)\Big]\\&=c^3\Big(\frac{c}{12}+\frac{a}{3}\Big)=\frac{c^3(c+4a)}{12}.\end{aligned}$$

由於 $c+4a=b+3a$，上式即為

$$S=\frac{1}{12}(b-a)^3(3a+b),$$

與所求相符。

想一想 為何不直接把所有東西以 a 和 b 展開？

當然可以，但目標式含有因式 $(b-a)^3$，要從一條關於 a 和 b 的四次式中把它抽出來十分費勁。改寫為 $c=b-a$ 後，這個因式會自動出現，因為積分中的每一項本身已帶有 c^2 或更高次。

三角形 T 與不等式

以 OR 作為三角形 OPR 的底：它位於 y 軸上，長度為 $2ac^2$。垂直高度是 P 到 y 軸的距離，即 c。所以

$$T=\tfrac12\cdot 2ac^2\cdot c=ac^3=a(b-a)^3.$$

因此，由於 $(b-a)^3>0$，

$$S-\tfrac13 T=\frac{(b-a)^3}{12}(3a+b-4a)=\frac{(b-a)^4}{12}>0,$$

因為 $b\neq a$。故 $S>\frac13 T$，與所求相符。

驗算

- 取 $a=1$、$b=3$（即圖中情況）：$P=(2,2)$，$Q=(4,4)$，而曲線在 $x=2$ 時給出 $y=2$，在 $x=4$ 時給出 $y=4$。切線公式給出 $y=-3x+8$；斜率公式 $(3-x)(3-3x)$ 在 $x=2$ 時等於 -3。直接積分，$S=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)\,\mathrm{d}x=4-16+16=4$，與 $\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 6=4$ 吻合。此外 $T=8$，而 $4>\frac83$。
- 比值 $S/(\frac13 T)=(3a+b)/(4a)$ 在 $b\to a$ 時趨向 1，所以常數 $\frac13$ 已是最佳可能的。這是合理的：對於拋物線 $y=px-qx^2$，同樣的構造給出 $S=qc^3/6$ 及 $T=qc^3/2$，所以 $S=\frac13 T$ 恰好成立；而當 P 非常接近 O 時，兩者之間的三次曲線幾乎就是一條拋物線。

- 對數以千計隨機取得的 $0 < a < b$，以電腦檢驗交點、切線、面積（以數值積分計算）及不等式，結果均與公式一致。

常見錯誤

- 把 $x(b-x)^2 = a^2x$ 除以 x 而沒有記下根 $x = 0$，或只取 $b - x = a$ 而遺漏了 Q。
- 以直線減曲線來積分，得出負的「面積」：積分前先確認哪個圖像在上方。
- 畫草圖時把三次曲線畫成在 $x = b$ 穿過 x 軸，而不是在該處與 x 軸相切。

STEP 之外

最後一部分中比值的極限為 1，這與阿基米德（Archimedes）的拋物線求積（quadrature of the parabola）一脈相承：對於拋物線，弓形的面積恰好是三角形 OPR 面積的三分之一；而在 O 附近，三次曲線局部上就是一條拋物線，所以不等式在極限下收緊為等式。理解局部行為爲何由泰勒（Taylor）展開的頭幾項決定，並把「幾乎是一條拋物線」說得嚴謹，正是大學一年級分析學（analysis）的課題。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析學》）是一本親切易讀的書，可以看到泰勒定理（Taylor's theorem）的嚴謹處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。