詳細解答

STEP III 2017，第 9 題

力學 • 連接質點與能量

STEP III 2017，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

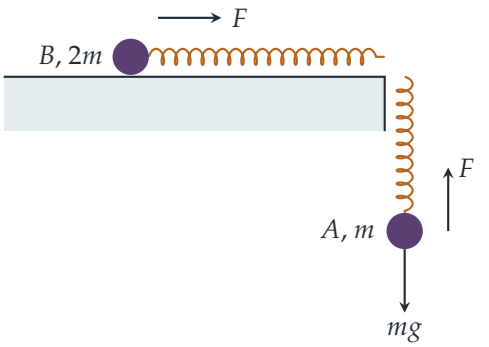
step.maths.org/questions/17-s3-q9

關鍵思路

彈簧的張力（tension）未知，而且隨時間改變，但它以相同大小作用於兩個質點上。所以，只要把兩條運動方程（equations of motion）按適當比例相加，張力就會互相抵消，剩下一條可以直接積分（integrate）的關係式。在第二部分，這條積分後的關係告訴我們兩個質點在時間 T 時的位置，以及它們的速率之間有何聯繫。接着，能量守恆（conservation of energy）給出第二條方程，兩者合起來便可確定 B 的速率。

解答

我們把 A 和 B 視為質點，並把彈簧視為輕彈簧。桌面光滑，而彈簧光滑地繞過桌邊。釋放後，A 鉛垂下落，B 則沿桌面向桌邊滑動。設時間 t 時彈簧的張力為 F。當 $x < a$ 時，B 仍在桌面上。



關係式 $y + 2x = \frac{1}{2}gt^2$

對 A 取向下為 y 的正方向，對 B 取向桌邊為 x 的正方向。由牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）：

$$\text{對}A\text{(鉛垂方向)：}\quad m\ddot{y} = mg - F,$$
$$\text{對}B\text{(水平方向)：}\quad 2m\ddot{x} = F.$$

（對 B 而言，重量與法向反作用力（normal reaction）互相抵消，而且沒有摩擦力（friction）。）把兩條方程相加便消去 F：

$$m\ddot{y} + 2m\ddot{x} = mg \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} + 2\ddot{x} = g.$$

兩個質點都由靜止開始，且 $x = y = 0$。積分一次得 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$，由於 $t = 0$ 時兩個速度皆為零，所以沒有常數項。再積分一次得

$$y + 2x = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

同樣沒有常數項，這正是所求的結果。

> **想一想** 我們不知道 F，因為它取決於不斷改變的伸長量（extension）$y - x$。那我們怎樣仍然能得出結論？

我們根本不需要 F。只要把兩條方程乘以適當的因子（這裏只需直接相加），F 就會以相反的符號出現。組合 $y + 2x$ 是類似動量（momentum）的量 $my + 2mx$ 的 $1/m$ 倍，而驅動它的唯一外力就是 A 的重量。

B 在時間 T 時的速率

在時間 $T = \sqrt{6a/g}$ 時，質點 B 到達桌邊，所以 $x = a$。由於 $\frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{6a}{g} = 3a$，由第一部分得

$$y + 2a = 3a \quad\Longrightarrow\quad y = a.$$

因此在時間 T 時，彈簧的伸長量為 $y - x = a - a = 0$。彈簧再次回到自然長度（natural length），不儲存任何彈性勢能（elastic energy）。

設 u 和 v 分別為 B 和 A 在時間 T 時的速率。由積分一次後的關係式 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$，在 $t = T$ 時得

$$v + 2u = gT = \sqrt{6ag}. \tag{1}$$

能量。桌面光滑而彈簧是輕的，所以機械能（mechanical energy）守恆。開始時，兩個質點都靜止，彈簧未被拉伸。在時間 T 時，A 下降了距離 a，而彈簧再次處於未拉伸狀態，所以失去的勢能（potential energy）mga 全部轉化為動能（kinetic energy）：

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2m)u^2 = mga \quad\Longrightarrow\quad v^2 + 2u^2 = 2ga. \tag{2}$$

想一想 兩條方程，其中一條是二次的：我們不是應該預期有兩個可能的速率嗎？

把由 (1) 得出的 $v = \sqrt{6ag} - 2u$ 代入 (2)：

$$\begin{aligned} 6ag - 4\sqrt{6ag}\,u + 4u^2 + 2u^2 &= 2ga \\ 6u^2 - 4\sqrt{6ag}\,u + 4ag &= 0 \\ 3u^2 - 2\sqrt{6ag}\,u + 2ag &= 0. \end{aligned}$$

判別式（discriminant）為 $4 \cdot 6ag - 4 \cdot 3 \cdot 2ag = 0$，所以這個二次式是完全平方（perfect square），只有一個根：

$$(\sqrt{3}\,u - \sqrt{2ag})^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2ag}{3}}.$$

所以 B 到達桌邊時的速率為 $\sqrt{2ag/3}$，正如所求。由 (1)，$v = \sqrt{6ag} - 2\sqrt{2ag/3} = \sqrt{2ag/3}$，兩者亦相同。在那一刻，兩個質點以相同速率運動，這與彈簧處於自然長度的情況吻合。

驗算

- 重根（repeated root）是有意義的。當總「動量」$v + 2u$ 固定時，動能 $\frac{1}{2}mv^2 + mu^2$ 在 $v = u$ 時最小，而這裏的最小值恰好是 mga。所以能量方程與 (1) 只有在 $u = v$ 時才能同時成立，此時由 (1) 直接得 $3u = \sqrt{6ag}$。
- 完整求解運動（題目叫我們不要這樣做）會得到 $\omega T = 2\pi$，其中 $\omega^2 = 3\lambda/(2am)$：伸長量恰好經歷一次完整的振動，然後回到零。以 $a = 1.3\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 進行逐步數值積分（numerical integration），得 $x(T) = y(T) = a$，而兩個速率都等於 $2.9143\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \sqrt{2ag/3}$。
- 量綱（dimensions）：$\sqrt{ag}$ 是速率，$\sqrt{a/g}$ 是時間。

常見錯誤

- 忘記彈簧一般而言帶有彈性勢能。這個論證之所以成立，只是因為在時間 T 時 $x = y = a$，使伸長量為零。必須明確證明這一點。
- 只寫出能量方程，然後嘗試從中解出 u。這條方程有兩個未知數，所以我們還需要關係式 (1)。

STEP 之外

量 $my + 2mx$ 的表現就像動量：內力（這裏是彈簧張力）在其中互相抵消，只有外力才能改變它。這是質點系力學的起點。一般而言，我們把運動分拆為質心（centre of mass）部分和相對部分，而這裏的相對坐標 $y - x$ 作簡諧運動（simple harmonic motion）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）細緻地發展了這些概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。