詳細解答

STEP III 2017，第 8 題

純數學 • 分部求和法

> **STEP III 2017，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q8

關鍵思路

開首的恆等式是分部積分（integration by parts）的離散版本，即「分部求和」（summation by parts）：它把一個涉及 b 的差分的和，換成一個涉及 a 的差分的和。要把它用於三角和，我們選取 b_m，使 $b_{m+1} - b_m$ 產生我們想要的項；和差化積公式（sum-to-product formula）可把正弦或餘弦之差化為單一乘積。然後選 a_m 為 1 或 m，便能令另一邊變得容易處理。

解答

恆等式

$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1$ 這個量可以伸縮相消（telescopes）：

$$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 = \sum_{m=1}^{n} (a_{m+1}b_{m+1} - a_mb_m).$$

在每個括號內加上再減去 a_mb_{m+1}，得

$$a_{m+1}b_{m+1} - a_mb_m = a_m(b_{m+1} - b_m) + b_{m+1}(a_{m+1} - a_m).$$

對 $m = 1, \ldots, n$ 求和並移項，便正好得到所求的恆等式。

在各個三角部分中，我們一直假設 $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$（即 x 不是 2π 的倍數），使 $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x$ 有定義。

第 (i) 部分

取 $b_m = \sin mx$，以 $A = (m+1)x$、$B = mx$ 代入和差化積公式，得

$$b_{m+1} - b_m = \sin(m+1)x - \sin mx = 2\cos(m+\tfrac{1}{2})x \,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

現在對每個 m 取 $a_m = 1$，於是 $a_{m+1} - a_m = 0$，恆等式中最後的和便等於零。恆等式變成

$$2\sin\tfrac{1}{2}x \sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x = b_{n+1} - b_1 = \sin(n+1)x - \sin x.$$

兩邊除以 $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$，

$$\sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x = \tfrac{1}{2}(\sin(n+1)x - \sin x)\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

因子 m 提示我們取 $a_m = m$，使 $a_{m+1} - a_m = 1$。這樣我們便需要 $b_{m+1} - b_m$ 是 $\sin mx$ 的倍數。

> **想一想** 選取哪個 b_m，才能令 $b_{m+1} - b_m$ 成為 $\sin mx$ 的倍數？

在第 (i) 部分中，於 $(m+1)x$ 和 mx 處兩個正弦之差，給出了在中點 $(m+\frac{1}{2})x$ 處的餘弦。要得到 $\sin mx$，我們需要一個餘弦之差，而其兩個自變量的中點是 mx，所以取 $b_m = \cos(m-\frac{1}{2})x$。利用 $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$（這亦可由題目中的第一個提示推出），

$$b_{m+1} - b_m = \cos(m+\tfrac{1}{2})x - \cos(m-\tfrac{1}{2})x = -2\sin mx \,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

記 $S = \sum_{m=1}^{n} m\sin mx$。取 $a_m = m$，恆等式給出

$$-2\sin\tfrac{1}{2}x\, S = (n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})x - \cos\tfrac{1}{2}x - \sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x.$$

最後的和正是第 (i) 部分的結果。代入後，兩邊乘以 $-2\sin\frac{1}{2}x$：

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}x\, S = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x - 2(n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})x \,\sin\tfrac{1}{2}x + \sin(n+1)x - \sin x.$$

現在化簡兩個乘積：

- $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sin x$，它與 $-\sin x$ 互相抵消；
- 由 $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$，取 $A = (n+\frac{1}{2})x$、$B = \frac{1}{2}x$，

$$2\cos\big(n+\tfrac{1}{2}\big)x \,\sin\tfrac{1}{2}x = \sin(n+1)x - \sin nx.$$

因此

$$\begin{aligned} 4\sin^2\tfrac{1}{2}x\,S &= -(n+1)\big(\sin(n+1)x - \sin nx\big) + \sin(n+1)x \\ &= -n\sin(n+1)x + (n+1)\sin nx. \end{aligned}$$

兩邊除以 $4\sin^2\frac{1}{2}x$，

$$\sum_{m=1}^{n} m\sin mx = \Big(-\tfrac{n}{4}\sin(n+1)x + \tfrac{n+1}{4}\sin nx\Big)\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}x,$$

所以

$$p = -\frac{n}{4}, \qquad q = \frac{n+1}{4}.$$

驗算

- 當 $n = 1$ 時，利用 $1-\cos x = 2\sin^2\frac{1}{2}x$，公式給出 $\frac{1}{4}(2\sin x - \sin 2x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \sin x$。這正是唯一的一項 $1\cdot\sin x$。
- 數值上，取 $n = 3$ 及 $x = 1$：$\sin 1 + 2\sin 2 + 3\sin 3 \approx 3.08343$，而 $\big(-\frac{3}{4}\sin 4 + \sin 3\big)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2} \approx 3.08343$ 亦然。
- 第 (ii) 部分亦可透過把 $\sum_{m=1}^{n}\cos mx$ 對 x 求導數（differentiating）得出，結果是 $-S$；這是一個有用的獨立驗算。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分選取 $b_m = \cos mx$：這樣差便是 $\sin(m+\frac{1}{2})x$ 的倍數，而不是 $\sin mx$ 的倍數，方法因而卡住。
- 在 $\cos A - \cos B$ 中弄錯正負號：它等於 $-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，前面有負號。
- 在除以 $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ 中的那個量之前，忘記先說明它不為零。

STEP 之外

分部求和（阿貝爾求和，Abel summation）是分部積分的離散孿生兄弟，也是大學一年級分析中的主力工具。配合像第 (i) 部分那樣的界——它顯示 $\cos(m+\frac{1}{2})x$ 的部分和（partial sums）保持有界——它可以證明狄利克雷判別法（Dirichlet's test）：例如，$\sum\frac{\sin mx}{m}$ 對每個 x 都收斂（converges）。像第 (ii) 部分那樣的和亦出現於傅里葉級數（Fourier series）中，這類閉合形式正是研究收斂性的起點。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對阿貝爾求和及狄利克雷判別法有清晰的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。