詳細解答

STEP III 2017，第 7 題

純數學 • 橢圓的切線

> **STEP III 2017，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q7

關鍵思路

參數（parameter）t 把「在 T 點的切線（tangent）通過 (X, Y)」這個條件化為一條關於 t 的二次方程（quadratic equation）。每一個根（root）都對應一個切點（point of contact），所以數從一點出發的切線條數，就等於數實根的個數，也就是判別式（discriminant）的問題。在第 (ii) 部分，兩個切點的參數 p 和 q 正好是該二次方程的兩個根，因此它們的和與積可以直接從係數讀出。

解答

該點位於橢圓上

代入 T 的坐標，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}=1,$$

所以對每一個實數 t，T 都位於橢圓（ellipse）上。

第 (i) 部分

對 t 求導，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-4at}{(1+t^2)^2},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

與其把兩者相除（在 $t=0$ 時會出問題），不如使用橢圓在 (x_0, y_0) 處的標準切線方程 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$；它的法向量（normal）方向 $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ 與上面的速度向量垂直，因為

$\frac{1-t^2}{a}\cdot(-4at)+\frac{2t}{b}\cdot 2b(1-t^2)=0$。因此在 T 點的切線 L 為

$$\frac{x(1-t^2)}{a(1+t^2)}+\frac{2ty}{b(1+t^2)}=1 \iff bx(1-t^2)+2aty=ab(1+t^2).$$

代入 $(x,y)=(X,Y)$，並按 t 的冪次整理：

$$bX-bXt^2+2aYt-ab-abt^2=0 \iff (a+X)bt^2-2aYt+b(a-X)=0,$$

即為所求。

*兩條切線。*反過來看：參數為 t 的點處的切線通過 (X,Y)，當且僅當 t 滿足這條方程。由於 $X\neq -a$ 且 $b\neq 0$，t^2 的係數不為零，所以這確實是一條二次方程，其判別式為

$$4a^2Y^2-4b^2(a+X)(a-X)=4(a^2Y^2-(a^2-X^2)b^2).$$

若 $a^2Y^2>(a^2-X^2)b^2$，判別式為正，所以有兩個相異實根 $t_1\neq t_2$。不同的 t 值給出橢圓上不同的點（映射 $t\mapsto T$ 是一一對應的（one-to-one）；令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，它就是熟悉的 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$，其中 $-\pi<\theta<\pi$）。不同的切點給出不同的切線，因為橢圓的切線只在其切點與橢圓相交。所以通過 (X,Y) 有兩條不同的切線。

想一想 會不會遺漏了一條參數 t 取不到的切線？

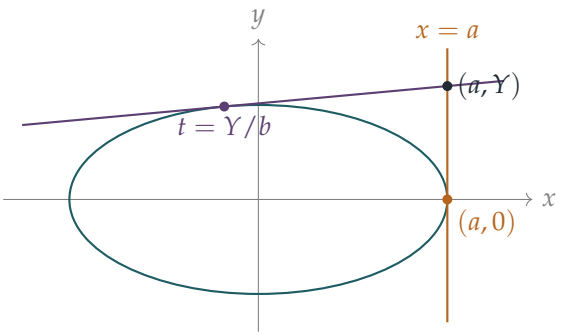
橢圓上唯一不能寫成 $(*)$ 形式的點是 $(-a,0)$（即 $t\to\infty$ 時的極限），其切線為 $x=-a$。這條直線只在 $X=-a$ 時才通過 (X,Y)，而這情況已被排除。所以該二次方程涵蓋了所有通過 (X,Y) 的切線。

*幾何意義。*把條件除以 $a^2b^2>0$，得

$$\frac{Y^2}{b^2}>1-\frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}>1,$$

即 (X,Y) 位於橢圓之外。所以與圓的情況一樣，從橢圓外任何一點都可以作兩條切線。

*$X^2=a^2$ 的情況。*此時條件變為 $a^2Y^2>0$，即 $Y\neq 0$：該點位於其中一條鉛垂線 $x=\pm a$ 上，但不在頂點（vertex）$(\pm a,0)$。其中一條切線就是鉛垂線 $x=\pm a$ 本身，它在 $(\pm a,0)$ 與橢圓相切。另一條則在別處與橢圓相切：當 $X=a$ 時，二次方程變為 $2abt^2-2aYt=0$，其根為 $t=0$（鉛垂切線）及 $t=Y/b\neq 0$；當 $X=-a$ 時，它變為 $-2aYt+2ab=0$，得 $t=b/Y$，而第二條切線是 $x=-a$，即在缺失的點 $(-a,0)$ 處的切線。下圖展示 $X=a$、$Y>0$ 的情況。



所以當 $X^2 = a^2$ 時結果仍然成立：只要 $Y \neq 0$，即該點位於橢圓之外，通過 (X, Y) 就有兩條不同的切線。

第 (ii) 部分

在 P 點的切線通過 (X, Y)，所以由第 (i) 部分，p 是

$$(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0,$$

的一個根，q 亦然。由於 $X \neq -a$，這是一條二次方程，而且 $p \neq q$（因為 $P \neq Q$），所以 p 和 q 就是它的兩個根。因此

$$pq = \frac{b(a - X)}{b(a + X)} = \frac{a - X}{a + X} \quad \Longrightarrow \quad (a + X)pq = a - X,$$

即為所求，而且

$$p + q = \frac{2aY}{b(a + X)}.$$

最後部分

在切線 $bx(1 - t^2) + 2aty = ab(1 + t^2)$ 中令 $x = 0$，得 $2aty = ab(1 + t^2)$。兩條切線確實與 y 軸相交，所以 $p, q \neq 0$（在 $t = 0$ 時切線為 $x = a$），並且

$$y_1 = \frac{b(1 + p^2)}{2p}, \qquad y_2 = \frac{b(1 + q^2)}{2q}.$$

寫成 $\frac{1+p^2}{p} = p + \frac{1}{p}$，

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2}\left(p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{b}{2}(p + q)\left(1 + \frac{1}{pq}\right) = \frac{b(p + q)(1 + pq)}{2pq}.$$

由上面的結果，$1 + pq = \dfrac{2a}{a + X}$，所以利用 $pq = \dfrac{a - X}{a + X} \neq 0$，

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{2aY}{b(a + X)} \cdot \frac{2a}{a + X} \cdot \frac{a + X}{a - X} = \frac{2a^2Y}{(a + X)(a - X)} = \frac{2a^2Y}{a^2 - X^2}.$$

令它等於 $2b$，並乘以 $(a^2 - X^2)/(2a^2b)$（由於 $X^2 \neq a^2$，它不為零）：

$$\frac{Y}{b} = \frac{a^2 - X^2}{a^2} = 1 - \frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y}{b} = 1,$$

即為所求。所以交點位於一條通過 $(\pm a, 0)$ 和 $(0, b)$ 的拋物線（parabola）上。

驗算

- 取 $a = 2$、$b = 1$ 及 $(X, Y) = (4, 1)$（在橢圓外，因為 $4 + 1 > 1$），二次方程為 $6t^2 - 4t - 2 = 0$，其根為 $t = 1$ 及 $t = -\frac{1}{3}$：分別對應在 $(0, 1)$ 和 $(1.6, -0.6)$ 的切線。這兩條切線 $y = 1$ 和 $2x - 3y = 5$ 都確實通過 $(4, 1)$。此時 $pq = -\frac{1}{3} = \frac{2-4}{2+4}$，$p + q = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$，與公式的預測一致。
- 在中心 $(0, 0)$，判別式為 $-4a^2b^2 < 0$：沒有切線，正如從橢圓內部出發所預期的。
- 用電腦檢驗了大量隨機的橢圓及點對 P、Q，直接求兩條切線的交點；pq、$p + q$ 和 $y_1 + y_2$ 的公式全部吻合，而且當 $y_1 + y_2 = 2b$ 時，交點滿足 $X^2/a^2 + Y/b = 1$。

常見錯誤

- 用 $\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$ 求斜率（gradient），卻忘記它在 $t = 0$ 時失效，因為那裏的切線是鉛垂的。
- 在 $X = -a$ 時仍把 $(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0$ 當作二次方程；這正是 $X^2 = a^2$ 的情況需要另行處理的原因。
- 只寫到「判別式為正」便停下，而沒有說明為何兩個根會給出兩條不同的直線。

STEP 之外

圓錐曲線（conic）的有理參數化（rational parametrisation）$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ 是代數幾何（algebraic geometry）的起點：正因如此，每條擁有一個有理點的圓錐曲線都有無窮多個有理點，而它亦是畢氏三元組（Pythagorean triples）分類的基礎。從外點作的一對切線引出極線（polar）的概念，並通往射影幾何（projective geometry）；在射影幾何中，$t = \infty$ 處那個令人煩惱的缺失點變成一個普通的點。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）收錄了更多這類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。