詳細解答

STEP III 2017，第 6 題

純數學 • 代換積分法

STEP III 2017，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

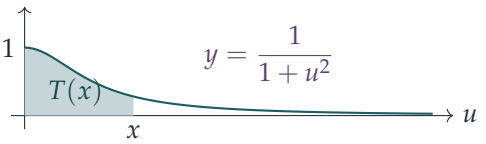
step.maths.org/questions/17-s3-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 4.2 節由一個積分建立三角學中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/trig-from-integral.html

關鍵思路

我們只憑積分就要建立反正切函數（inverse tangent），所以每一個性質都必須由代換（substitution）得出。代換 $u \mapsto 1/u$ 把區間 $(0, x)$ 與 $(1/x, \infty)$ 互換；而默比烏斯（Möbius）代換 $v = \frac{u+a}{1-au}$ 使連同微分在內的被積函數（integrand）$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 保持不變，因此它只是平移了積分上下限。在最後一部分適當選取數值，使平移後的上下限落回一個已知的值，便得到一條可以解出的方程。

解答



$T(x)$ 是陰影部分的面積；T_∞ 是 $u \geq 0$ 時曲線下方的全部面積。

第 (i) 部分

在 $T(x)$ 的積分中代入 $u = 1/t$，於是 $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$；當 u 由 0 變到 x 時，t 由 ∞ 下降到 $1/x$。於是

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{\infty}^{1/x} \frac{1}{1+t^{-2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = T_\infty - T(x^{-1}). \end{aligned}$$

（由於 T_∞ 是有限值，從 0 開始的積分是確實存在的積分（proper integral），所以把積分區間拆開是合理的。）這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

導數。由商法則（quotient rule），當 $u \neq a^{-1}$ 時，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

另一方面，

$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

除以 $1+u^2$，得 $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，正如所求。

加法公式（addition formula）。取 $a > 0$ 及 $0 < x < \frac{1}{a}$。當 $0 \le u \le x$ 時，$1-au \ge 1-ax > 0$，所以 v 在整個區間上有定義且連續，並且 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} > 0$，因此 v 由 $v(0) = a$ 遞增至 $v(x) = \frac{x+a}{1-ax}$。

? **想一想** 為甚麼 $x < \frac{1}{a}$ 這個條件重要？

若 x 達到 $\frac{1}{a}$，v 便會在積分區間內趨於無窮大，代換就失去意義。在 $x < \frac{1}{a}$ 的情況下，它是 $[0, x]$ 上一個光滑而遞增的變量代換。

導數的結果正好表示 $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，因此

$$\begin{aligned} T(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \int_a^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= \int_0^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a). \end{aligned}$$

這裏 T 的兩個自變量都是正數，所以一切都有定義。

第一個推論。記 $X = \frac{x+a}{1-ax}$。先後對 x 和 a 應用第 (i) 部分，

$$T(x^{-1}) = T_\infty - T(x) = T_\infty - T(X) + T(a) = T_\infty - T(X) + T_\infty - T(a^{-1}),$$

即 $T(x^{-1}) = 2T_\infty - T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a^{-1})$。

第二個推論。已知 $b > 0$ 及 $y > \frac{1}{b}$，設 $x = \frac{1}{y}$、$a = \frac{1}{b}$。於是 $x > 0$、$a > 0$，而 $y > \frac{1}{b}$ 等價於 $x < b = \frac{1}{a}$，所以上一個結果適用。分子分母同乘以 by，

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{by}} = \frac{b+y}{by-1},$$

又 $x^{-1} = y$、$a^{-1} = b$，所以

$$T(y) = 2T_\infty - T\left(\frac{y+b}{by-1}\right) - T(b).$$

第 (iii) 部分

$T(\sqrt{3})$。在最後一個結果中取 $y = b = \sqrt{3}$；由於 $\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$，條件 $y > \frac{1}{b}$ 成立。此時

$$\frac{y+b}{by-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3},$$

所以 $T(\sqrt{3}) = 2T_\infty - T(\sqrt{3}) - T(\sqrt{3})$，即 $3T(\sqrt{3}) = 2T_\infty$，故

$$T(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}T_\infty.$$

先求 $T(1)$。在第 (i) 部分取 $x = 1$，得 $T(1) = T_\infty - T(1)$，所以 $T(1) = \frac{1}{2}T_\infty$。

> **想一想** 當 $x = a$ 時，a 取甚麼值才能使 $\frac{x+a}{1-ax}$ 等於 1？

我們需要 $\frac{2a}{1-a^2} = 1$，即 $a^2 + 2a - 1 = 0$，其正根為 $a = \sqrt{2} - 1$。

$T(\sqrt{2}-1)$。於是在加法公式中取 $x = a = \sqrt{2} - 1 > 0$。條件 $x < \frac{1}{a}$ 即 $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$，顯然成立。由於 $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$，

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

所以 $T(\sqrt{2}-1) = T(1) - T(\sqrt{2}-1)$，得

$$T(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{2}T(1) = \tfrac{1}{4}T_\infty.$$

驗算

當然，T 其實就是 arctan，而 $T_\infty = \frac{\pi}{2}$；題目不准我們使用這些事實，但我們大可以用它們來核對：$\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$。用數值方法（辛普森法則（Simpson's rule））計算這些積分，得 $T_\infty \approx 1.570796$、$T(\sqrt{3}) \approx 1.047198$ 及 $T(\sqrt{2}-1) \approx 0.392699$，與 $\frac{2}{3}T_\infty$ 和 $\frac{1}{4}T_\infty$ 吻合。第 (ii) 部分的加法公式其實就是大家熟悉的 $\tan(A+B)$ 公式換了個樣子，其中 $x = \tan A$、$a = \tan B$。

常見錯誤

- 代入 $u = 1/t$ 後忘記把上下限對調：正是 $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ 中的負號把 $\int_{\infty}^{1/x}$ 變成 $\int_{1/x}^{\infty}$。
- 在第 (iii) 部分暗中使用 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 或 arctan 的性質：題目禁止這樣做，重點在於一切都要由第 (i) 和第 (ii) 部分推出。
- 沒有就所用的具體數值檢查條件 $x < \frac{1}{a}$ 和 $y > \frac{1}{b}$。

STEP 之外

用積分定義一個函數，再從定義推導出它的全部性質，正是分析（analysis）課程嚴格建立 ln、exp、arctan 甚至 π 的方法：在這裏，π 可以直接定義為 $2T_{\infty}$。代換 $v = \frac{u+a}{1-au}$ 是一個默比烏斯變換（Möbius transformation），而它保持 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 不變這一事實，反映了圓的旋轉。分析方面可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；默比烏斯映射的幾何方面，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。