詳細解答

STEP III 2017，第 5 題

純數學 • 極坐標曲線

> **STEP III 2017，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q5

關鍵思路

以 θ 為參數，把曲線寫成參數式 (parametric form)：$x = f(\theta)\cos\theta$，$y = f(\theta)\sin\theta$。這樣斜率（gradient）便可由連鎖法則（chain rule）求得，而「以直角相交」就變成「兩斜率之積為 -1」。在最後一部分，曲線族 $r = a(1+\sin\theta)$ 經過 C 上的每一點，所以直角條件沿整條 C 都成立。於是條件便化為關於 f 的一階微分方程（first-order differential equation）。

解答

斜率

在曲線上，$x = f(\theta)\cos\theta$ 及 $y = f(\theta)\sin\theta$。用乘積法則（product rule）對 θ 求導，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

由連鎖法則，再把分子和分母同除以 $\cos\theta$（假設 $\cos\theta \neq 0$），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

以直角相交的曲線

在交點處，兩條曲線對應同一個 θ。設 $t = \tan\theta$，並以 f, f', g, g' 表示該處的值。若兩條切線（tangent）都不是鉛垂的，則兩曲線垂直（perpendicular）當且僅當兩斜率之積為 -1：

$$(f't + f)(g't + g) = -(f' - ft)(g' - gt).$$

把兩邊展開，含 $f'gt$ 和 $fg't$ 的項互相抵消，剩下

$$f'g't^2 + fg + f'g' + fgt^2 = 0 \iff (1+t^2)(f'g' + fg) = 0.$$

由於 $1 + t^2 = \sec^2\theta > 0$，得 $f'(\theta)g'(\theta) + f(\theta)g(\theta) = 0$，此即所求。

> **想一想** 若其中一條切線是鉛垂的，或 $\cos\theta = 0$，以致斜率或 $\tan\theta$ 不存在，又會怎樣？

改用方向向量（direction vector）代替斜率。$r = f(\theta)$ 的切線方向為 $(f'\cos\theta - f\sin\theta,\ f'\sin\theta + f\cos\theta)$，$g$ 的情況亦同理。兩者的純量積（scalar product）為

$$(f'\cos\theta - f\sin\theta)(g'\cos\theta - g\sin\theta) + (f'\sin\theta + f\cos\theta)(g'\sin\theta + g\cos\theta) = f'g' + fg,$$

因為交叉項互相抵消，且 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。所以在任何情況下，垂直的條件都是同一個。

求 $f(\theta)$

對於 $r = a(1+\sin\theta)$，有 $g'(\theta) = a\cos\theta$。

> **想一想** 這個條件只在兩曲線相交之處成立。為何我們可以在 C 的每一點上使用它？

任取 C 上一點，其角度為 θ，且 $f(\theta) > 0$、$\sin\theta \neq -1$。取 $a = f(\theta)/(1+\sin\theta) > 0$，便得到曲線族中一條在同一 θ 經過該點的曲線。依題設，這條曲線與 C 以直角相交，因此

$$f'(\theta)\, a\cos\theta + f(\theta)\, a(1+\sin\theta) = 0.$$

除以 $a > 0$，每個這樣的 θ 都滿足

$$f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(1+\sin\theta) = 0.$$

乘以 $1 - \sin\theta$，並利用 $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$：

$$\cos\theta\,[f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta] = 0.$$

在 $\cos\theta \neq 0$ 之處，括號內的式子為零。由商法則（quotient rule），括號內的式子等於 $(1-\sin\theta)^2$ 乘以 $f(\theta)/(1-\sin\theta)$ 的導數：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{f(\theta)}{1-\sin\theta}\right) = \frac{f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} = 0.$$

所以在區間 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 上，$f(\theta) = k(1-\sin\theta)$，其中 k 為常數。（等價地，我們也可以對 $f'/f = -(1+\sin\theta)/\cos\theta = -\cos\theta/(1-\sin\theta)$ 分離變數（separation of

variables）。曲線經過 $r=4$、$\theta=-\frac{1}{2}\pi$，故由連續性（continuity）得 $k(1+1)=4$，即 $k=2$。在 $\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 上，同樣的論證亦適用，而 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 與 $-\frac{1}{2}\pi$ 是同一方向，所以同樣有 $k=2$。因此

$$\boxed{f(\theta)=2(1-\sin\theta)}$$

這是另一條心形線（cardioid），即 $r=2(1+\sin\theta)$ 關於 x 軸的反射。

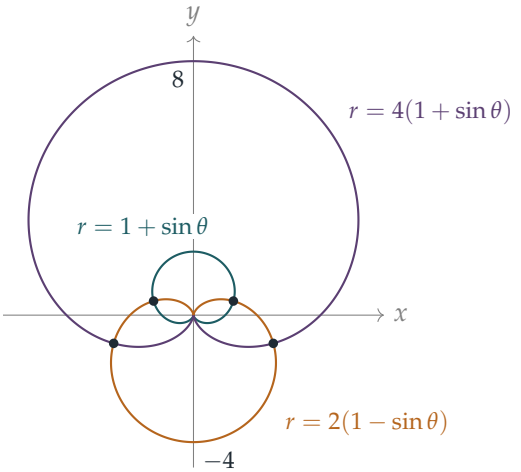
草圖

曲線 $r=a(1+\sin\theta)$ 是一條尖點（cusp）在原點、關於 y 軸對稱的心形線。它向上伸至 $(0,2a)$，並在 $(\pm a,0)$ 與 x 軸相交。曲線 $r=2(1-\sin\theta)$ 是形狀相同但開口向下的心形線：其尖點在原點，在 $(\pm2,0)$ 與 x 軸相交，並向下伸至 $(0,-4)$。

交點可由解 $a(1+\sin\theta)=2(1-\sin\theta)$ 得出，結果為 $\sin\theta=\frac{2-a}{2+a}$：

- $a=1$：$\sin\theta=\frac{1}{3}$，$r=\frac{4}{3}$，交點為 $\left(\pm\frac{8\sqrt{2}}{9},\frac{4}{9}\right)$；
- $a=4$：$\sin\theta=-\frac{1}{3}$，$r=\frac{8}{3}$，交點為 $\left(\pm\frac{16\sqrt{2}}{9},-\frac{8}{9}\right)$。

三條曲線亦全都經過原點。



驗算

- 在 $\theta=0$ 時，曲線 $r=2(1-\sin\theta)$ 位於 $(2,0)$，而 $r=2(1+\sin\theta)$ 亦經過同一點。該處 $f=2$、$f'=-2$、$g=2$、$g'=2$，所以 $f'g'+fg=-4+4=0$，與預期相符。
- 在 $\theta=-\frac{1}{2}\pi$ 時，$f=2(1+1)=4$，符合要求。
- 已用電腦確認在 $\left(\frac{8\sqrt{2}}{9},\frac{4}{9}\right)\approx(1.257,0.444)$ 的兩條切線互相垂直；對許多隨機取的 a 值，切線亦同樣經確認為垂直。

常見錯誤

- 只在一個交點使用直角條件。「對每個正數 a」的用意，正是要令條件在 C 的每一點都成立。
- 忘記 $f(\theta)/(1-\sin\theta)$ 在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 沒有定義，因而在決定常數時不夠謹慎。
- 把 $r = 2(1-\sin\theta)$ 畫成開口向上：由於在 $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ 時 $r = 4$，這條曲線主要位於 x 軸下方。

STEP 之外

若一族曲線與另一族曲線處處以直角相交，這兩族曲線便稱為一對正交軌線（orthogonal trajectories）。這裏的心形線 $r = a(1+\sin\theta)$ 與 $r = b(1-\sin\theta)$ 就構成這樣的一對。這個概念出現在大學一年級的微分方程課程中，亦在物理學裏再次出現：場線（field lines）與等勢線（equipotentials）以直角相交。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講解了如何求正交軌線。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）則展示了共形映射（conformal map）如何產生這類曲線族。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。