詳細解答

STEP III 2017，第 4 題

純數學 • 函數的幾何平均

STEP III 2017，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q4

關鍵思路

幾何平均（geometric mean）其實就是普通平均值的指數：$\ln F(y)$ 是 $\ln f$ 在 $[0,y]$ 上的平均值。因此 F 的每一個性質，都來自對數的某個性質（換底公式（change of base）、$\ln(fg)=\ln f+\ln g$），再配合積分的線性（linearity）。至於第 (iv) 部分的逆命題（converse），條件會變成一條含積分的方程，對它求導後，便化為一條簡單的微分方程（differential equation）。

解答

全文中記

$$\ln F(y)=\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (y>0),$$

這就是把定義兩邊取對數後的形式。

第 (i) 部分

由於 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$\log_a$ 有定義，而且 $\ln a\neq 0$；由換底公式得 $\log_a f(x)=\dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$。此外，對任何實數 t，都有 $a^t=\mathrm{e}^{t\ln a}$。因此

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{y}\int_0^y \log_a f(x)\,\mathrm{d}x} &= \exp\left(\ln a\cdot\frac{1}{y}\int_0^y \frac{\ln f(x)}{\ln a}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right)=F(y), \end{aligned}$$

其中我們把常數 $\frac{1}{\ln a}$ 提到積分號外，再與 $\ln a$ 約去。這就是所求的結果。（條件 $a\neq 1$ 正是容許我們除以 $\ln a$ 的原因。）

第 (ii) 部分

由於 $f(x) > 0$ 且 $g(x) > 0$，故 $h(x) > 0$，所以 H 有定義，且 $\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$。由積分的線性，

$$\ln H(y) = \frac{1}{y}\int_0^y (\ln f(x) + \ln g(x))\,\mathrm{d}x = \ln F(y) + \ln G(y) = \ln(F(y)G(y)).$$

由於 ln 是一一對應的（one-to-one），故 $H(y) = F(y)G(y)$。

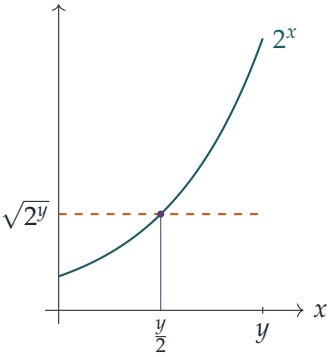
第 (iii) 部分

這裏 $f(x) = b^x > 0$，且 $\ln f(x) = x \ln b$，所以

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y x \ln b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{2}\ln b = \frac{y}{2}\ln b.$$

因此 $F(y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}\ln b} = b^{y/2} = \sqrt{b^y}$，即為所求。

下圖展示 $b = 2$ 時這個結果的意思：2^x 在 $[0, y]$ 上的幾何平均，等於 2^x 在中點 $\frac{y}{2}$ 的值，因為 $\ln 2^x$ 是線性的，而線性函數的平均值就是它在中點的值。



第 (iv) 部分

正如題目隱含地假設的一樣，我們假設 f 是連續（continuous）的，使各積分存在，並可使用微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）。設 $\phi(x) = \ln f(x)$；由於 $f(x) > 0$，它有定義，而且是連續的。取對數後，假設 $F(y) = \sqrt{f(y)}$ 表示

$$\frac{1}{y}\int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\phi(y) \quad \text{即} \quad \int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}\phi(y) \qquad \text{對所有} y > 0. \qquad (*)$$

? **想一想** 怎樣才能消去積分？我們又是否可以這樣做？

對 y 求導。由微積分基本定理，$(*)$ 的左方是可微（differentiable）的，其導數為 $\phi(y)$。所以右方也可微，因此當 $y>0$ 時，$\phi(y)=\frac{2}{y}\times$ (左方) 也可微。對 $(*)$ 求導，右方使用乘積法則（product rule）：

$$\phi(y)=\tfrac{1}{2}\phi(y)+\tfrac{y}{2}\phi'(y) \quad\Longrightarrow\quad y\,\phi'(y)-\phi(y)=0.$$

由於 $y>0$，我們可以除以 y^2，並認出這是由商法則（quotient rule）得出的導數：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\phi(y)}{y}\right)=\frac{y\phi'(y)-\phi(y)}{y^2}=0.$$

所以 $\phi(y)/y$ 在區間 $y>0$ 上是常數，設為 k（由均值定理（mean value theorem），在一個區間上導數為零的函數是常數）。因此 $\ln f(x)=kx$，且

$$f(x)=\mathrm{e}^{kx}=b^x, \qquad \text{其中} b=\mathrm{e}^k>0.$$

這對每個 $x>0$ 都成立；單一點 $x=0$ 的值不影響任何積分，而且由連續性，無論如何都有 $f(0)=1=b^0$。結合第 (iii) 部分，這說明幾何平均等於 $\sqrt{f(y)}$ 的函數，恰好就是函數 b^x。

驗算

- 在第 (iii) 部分取 $b=4$、$y=2$：$\ln F(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 x\ln 4\,\mathrm{d}x=\ln 4$，所以 $F(2)=4=\sqrt{4^2}$；數值積分的結果與此吻合。
- 在第 (iv) 部分，試一個不是 b^x 形式的函數，例如 $f(x)=3\cdot 2^x$。由第 (ii) 及 (iii) 部分，$F(y)=3\cdot 2^{y/2}$，而 $\sqrt{f(y)}=\sqrt{3}\cdot 2^{y/2}$，所以條件不成立，理應如此。我們的論證會得出 $\phi(y)/y=\ln 2+\frac{\ln 3}{y}$，它並非常數。
- 第 (i) 及 (ii) 部分已用電腦對隨機的正函數、y 值，以及大於和小於 1 的底 a 作驗證。

常見錯誤

- 在第 (iv) 部分對 $(*)$ 求導時，忘記對 $\frac{y}{2}\phi(y)$ 使用乘積法則，結果完全丟失了 ϕ' 項。
- 單憑第 (iii) 部分便斷定 $f(x)=b^x$：第 (iii) 部分只說明 b^x 具有這個性質，並沒有說明其他函數都沒有。第 (iv) 部分是逆命題，需要獨立的論證。
- 在第 (i) 部分沒有指出哪裏需要 $a\neq 1$：正是這個條件使 $\log_a$ 有意義，並使 $\ln a\neq 0$。

STEP 之外

連續幾何平均是 $(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$ 的積分版本；對凹函數（concave function）ln 應用琴生不等式（Jensen's inequality），可證明它永遠不會超過普通平均值 $\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$，這就

是連續版本的算術–幾何平均不等式（AM–GM inequality）。第 (iv) 部分是一個小例子，展示如何把函數方程（functional equation）化為微分方程來求解，而這需要小心處理可微性；在分析課程中，你會學到微積分基本定理究竟在甚麼情況下容許這樣做。如需嚴謹的理論背景，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。