詳細解答

STEP III 2017，第 3 題

純數學 • 多項式的根

> **STEP III 2017，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q3

本題在 *Beyond STEP* 第 6.4 節*解四次方程*中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/quartic.html

關鍵思路

任何多項式的係數都是其根的對稱函數（symmetric functions），所以三次方程的係數 A 是其三個根之和的相反數，而這個和正是 α、β、γ、δ 的一個熟悉的對稱函數。對於題中指定的四次方程，其對應的三次方程有一個整數根，因此可以完全因式分解。知道 $\alpha\beta+\gamma\delta$ 的值後，便可把四次方程拆成兩個二次因式，一個以 α、β 為根，另一個以 γ、δ 為根，而其餘的係數則確定這兩個因式。

解答

求 A

全程我們使用四次方程的韋達定理（Vieta's relations）：

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p, \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r, \qquad \alpha\beta\gamma\delta=s.$$

該三次方程是首一（monic）的，其根為 $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$、$y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$ 及 $y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$，所以

$$y^3+Ay^2+\cdots=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),$$

比較 y^2 的係數，得 $A = -(y_1 + y_2 + y_3)$。但 $y_1 + y_2 + y_3$ 恰好包含六個由兩個不同根組成的乘積各一次，所以它等於 q。因此

$$A = -q.$$

第 (i) 部分

當 $p = 0$、$q = 3$、$r = -6$、$s = 10$ 時，三次方程的係數為

$$A = -3, \qquad pr - 4s = -40, \qquad 4qs - p^2 s - r^2 = 120 - 0 - 36 = 84,$$

所以方程為

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = 0.$$

任何整數根都必整除 84。試代入較小的因數，$y = 2$ 給出 $8 - 12 - 80 + 84 = 0$，所以 $y - 2$ 是一個因式：

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = (y - 2)(y^2 - y - 42) = (y - 2)(y - 7)(y + 6).$$

各根為 2、7 及 -6；最大的是 7，所以

$$\alpha\beta + \gamma\delta = 7.$$

第 (ii) 部分

展開得

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta,$$

即全部六個兩兩乘積之和減去 $\alpha\beta$ 與 $\gamma\delta$。所以

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = q - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 3 - 7 = -4.$$

接着，$\alpha\beta$ 與 $\gamma\delta$ 之和為 7，積為 $\alpha\beta\gamma\delta = s = 10$。因此它們是以下方程的根：

$$t^2 - 7t + 10 = (t - 5)(t - 2) = 0,$$

又因為 $\alpha\beta > \gamma\delta$，所以 $\alpha\beta = 5$ 及 $\gamma\delta = 2$。

第 (iii) 部分

設 $u = \alpha + \beta$。由於 $p = 0$，四個根之和為零，所以 $\gamma + \delta = -u$，而第 (ii) 部分給出 $-u^2 = -4$，所以 $u = \pm 2$。

? **想一想** u 應取哪個符號？我們怎樣判斷？

我們還未用到 r。把四個三元乘積兩兩分組，

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = \alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) = 5(-u) + 2u = -3u.$$

這等於 $-r = 6$，所以 $u = -2$。（取另一個符號會得到 $r = +6$，即另一個四次方程。）因此

$$\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 5, \qquad \gamma + \delta = 2, \quad \gamma\delta = 2.$$

所以 α、β 是 $x^2 + 2x + 5 = 0$ 的根，得 $x = -1 \pm 2\mathrm{i}$；而 γ、δ 是 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 的根，得 $x = 1 \pm \mathrm{i}$。因此四次方程

$$x^4 + 3x^2 - 6x + 10 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

的根為

$$x = -1 + 2\mathrm{i}, \quad -1 - 2\mathrm{i}, \quad 1 + \mathrm{i}, \quad 1 - \mathrm{i}.$$

驗算

- 展開 $(x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2)$：$x^3$ 項互相抵消，得到 $x^4 + 3x^2 - 6x + 10$，正是原來的四次式。
- 以這些根計算，$\alpha\gamma + \beta\delta$ 及 $\alpha\delta + \beta\gamma$（按某個次序）應為三次方程的另外兩個根 2 及 -6。它們之和為 $q - 7 = -4 = 2 + (-6)$，與預期相符。
- 公式 $A = -q$ 亦已用電腦在一千個根為隨機複數的四次方程上驗證過。

常見錯誤

- 誤取 $A = q$：y^2 的係數是各根之和的*相反數*。
- 停在 $u = \pm 2$ 並同時給出兩個可能：只有一個符號與 $r = -6$ 相容。
- 預期有實根：這個四次式對所有實數 x 都是正數，所以四個根全是複數。

STEP 之外

這裏的三次方程是該四次方程的*預解三次方程*（resolvent cubic），也是費拉里（Ferrari）方法的核心：解任何四次方程都可化為解一個三次方程，再解若干二次方程。這方法為何奏效，可由伽羅瓦理論（Galois theory）解釋；該理論研究根的置換（permutations）如何作用於像 $\alpha\beta + \gamma\delta$ 這樣的式子（三個式子各自被 24 個置換中一個含八個置換的子羣（subgroup）固定）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是入門這些概念的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。