詳細解答

# STEP III 2017，第 2 題

純數學 • 複平面上的旋轉

> **STEP III 2017，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q2

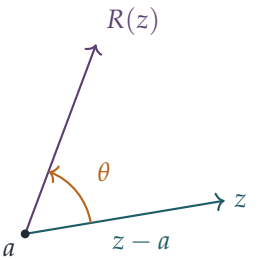
## 關鍵思路

要描述繞 $a$ 的旋轉（rotation），最簡單的做法是把原點移到 $a$：先減去 $a$，再乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，然後把 $a$ 加回去。因此每個旋轉都具有 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z + k$ 的形式；反過來，只要 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1$，這樣的映射就是繞其不動點（fixed point）轉 $\alpha$ 的旋轉。所以要辨認 $SR$，只需把兩條公式複合（compose），再求出不動點。利用半角因式分解（half-angle factorisation）$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\frac{1}{2}\alpha$，便可把答案化成所要求的形式。

## 解答

### 第 (i) 部分

由中心 $a$ 指向 $P$ 的向量（vector）是 $z - a$。繞 $a$ 逆時針旋轉 $\theta$，就是把這個向量轉 $\theta$，在複數中即乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$；由於 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$，長度保持不變。




所以 $P$ 的像 $w$ 滿足 $w - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a)$，即

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

正如所求。同理，$S(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$。

**第 (ii) 部分**

先作用 $R$，再作用 $S$：

$$\begin{aligned} SR(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\Big) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，繞 $c$ 轉 $\theta + \phi$ 的旋轉是 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + c(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)})$。兩者 $z$ 的係數已經相同，所以 $SR$ 恰好是這個旋轉，當且僅當

$$c(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \qquad (*)$$

? **想一想** 怎樣才能把括號 $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 化成半角的正弦？

提取因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$，使括號內變得對稱：

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

分別取 $\alpha = \theta + \phi$、$\theta$ 和 $\phi$ 代入，方程 $(*)$ 變成

$$-2\mathrm{i}\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = -2\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\mathrm{i}\,b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

兩邊除以 $-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$（它永不為零），得

$$c\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

若 $\theta + \phi \neq 2n\pi$，則 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$，因此上式唯一確定 $c$，而取這個 $c$ 時，映射 $SR$ 就是繞 $c$ 轉 $\theta + \phi$ 的旋轉。這正是所要求的結果。（這個條件是必要的：若 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) = 0$，一般而言根本沒有可供旋轉的不動點。）

**$\theta + \phi = 2\pi$ 的情況**。此時 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} = 1$ 且 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，所以

$$\begin{aligned} SR(z) &= z + a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \\ &= z + a(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1) + b(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \\ &= z + (b - a)(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}). \end{aligned}$$

所以 $SR$ 是平移（*translation*）$(b - a)(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$，平移距離為 $2|b - a|\,|\sin\frac{1}{2}\theta|$。當 $a = b$（繞同一點先轉 $\theta$ 再轉 $2\pi - \theta$），或當 $\theta$ 是 $2\pi$ 的倍數時，它是恆等映射（identity）；否則它是一個真正的平移，沒有不動點。

### 第 (iii) 部分

在 $SR$ 的公式中把 $(a,\theta)$ 與 $(b,\phi)$ 的角色互換，得

$$RS(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) + a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

兩個映射都把 $z$ 乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$，所以 $RS = SR$ 當且僅當常數項相同。兩者之差為

$$\begin{aligned} SR(z) - RS(z) &= a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1) + b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \\ &= (b-a)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \end{aligned}$$

乘積為零當且僅當其中一個因子為零，所以 $RS = SR$ 當且僅當

- $a = b$（兩個旋轉的中心相同），或
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$，即 $\theta$ 是 $2\pi$ 的倍數，所以 $R$ 是恆等映射，或
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = 1$，即 $\phi$ 是 $2\pi$ 的倍數，所以 $S$ 是恆等映射。

換句話說：兩個真正的旋轉只有在中心相同時才可交換（commute）。

## 驗算

- 取 $a = b$，(ii) 的公式給出 $c\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) = a\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\frac{1}{2}\theta + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\frac{1}{2}\phi\big)$，把括號展開得 $\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\phi + \cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\phi = \sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$（虛部互相抵消），所以 $c = a$，理應如此。
- 取 $\phi = 0$（$S$ 為恆等映射），則 $c\sin\frac{1}{2}\theta = a\sin\frac{1}{2}\theta$，所以 $c = a$。
- 取 $a = 0$、$b = 1$、$\theta = \phi = \frac{1}{2}\pi$。則 $R(z) = \mathrm{i}z$，$S(z) = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$，所以 $SR(z) = -z + 1 - \mathrm{i}$，即繞 $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$ 的半周旋轉。公式給出 $c\cdot 1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$。兩者吻合。
- 三個結果亦已用電腦在數以千計的隨機中心、角度和點上驗證，驗證時以幾何方式（按模和輻角）進行旋轉，而非使用上述公式；誤差均小於 $10^{-12}$。

## 常見錯誤

- 複合次序弄錯：$SR$ 表示先作用 $R$，所以是把 $R(z)$ 代入 $S$。
- 除以 $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$ 時，沒有指出它正是因為 $\theta+\phi \neq 2n\pi$ 才不為零。
- 在 (iii) 中，遺漏了其中一個旋轉是恆等映射的平凡情況。

## STEP 之外

滿足 $|\alpha| = 1$ 的映射 $z \mapsto \alpha z + \beta$，恰好就是平面上所有保持定向的等距變換（orientation-preserving isometries），而它們構成一個羣（group）：旋轉與平移合在一起，在複合運算下封閉。第 (iii) 部分是「這個羣不可交換」這一事實的一個小例子，而交換子（commutator）$RSR^{-1}S^{-1}$ 原來是一個平移。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）把複數乘法的這種幾何觀點發展得非常漂亮，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則涵蓋相關的羣論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。