詳細解答

STEP III 2017，第 11 題

力學 • 動量守恆

> **STEP III 2017，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q11

本題在 *Beyond STEP* 第 10.3 節火箭與槍炮中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/rockets.html

關鍵思路

系統不受任何外來的水平力，所以每次發射時水平動量（momentum）都守恆。題目中看似古怪的對地速率 $v - V$，其實說的是一件簡單的事：拋射體（projectile）總是以相對於貨車的速率 v 射出。至於動能（kinetic energy），不必每次都從頭重新計算；應利用 $(*)$ 化簡每次發射時的能量變化，然後再加起來。

解答

把貨車、炮和拋射體都視為沿同一直線運動的質點（particle），並取向前方向（即貨車運動的方向）為正。貨車速率為 V 時發射的拋射體，其速度為 $-(v - V) = V - v$，即相對於貨車的速度為 $-v$。發射屬於系統的內部作用，而軌道是光滑的，所以每次發射時總水平動量都守恆。

第 (i) 部分

發射前一切靜止，所以動量為零。由於 $V = 0$，每枚拋射體都以速度 $-v$ 射出，而貨車（質量 M）以速率 u 向前運動：

$$Mu - nmv = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{nmv}{M}.$$

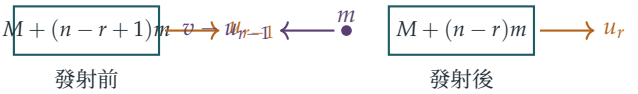
系統起初沒有動能，所以所得的能量為

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\left(1 + \frac{nm}{M}\right),$$

即為所求。

第 (ii) 部分

考慮第 r 次發射。發射前一刻，貨車載着 $n-r+1$ 枚未發射的拋射體，所以運動中的質量為 $M+(n-r+1)m$，速率為 u_{r-1}。發射後一刻，質量 $M+(n-r)m$ 以速率 u_r 運動，而一枚質量為 m 的拋射體的速度為 $u_{r-1}-v$。較早發射的拋射體不受影響，可以不予考慮。



由動量守恆得

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

把左方寫成 $\big(M+(n-r)m\big)u_{r-1} + mu_{r-1}$。於是 mu_{r-1} 項互相抵消，剩下

$$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv, \qquad \text{所以} \qquad u_r - u_{r-1} = \frac{mv}{M+(n-r)m},$$

這就是 $(*)$。

把 $(*)$ 對 $r=1,\ldots,n$ 相加，左方伸縮相消（telescoping），且 $u_0=0$，所以

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m}.$$

每個分母都滿足 $M+(n-r)m \geq M$，所以每一項都不大於 $\dfrac{mv}{M}$。當 $r=1$ 時不等式嚴格成立，因為 $n>1$ 使 $(n-1)m>0$。因此

$$u_n < n\cdot\frac{mv}{M} = u.$$

想一想 為甚麼逐枚發射的效果會較差？

在較早的發射中，炮不僅要推動貨車，還要推動車上所有仍未發射的拋射體，所以每一發所帶來的速率增量都較小。只有 $r=n$ 這一項（最後一發，車上已無其他負載）與同時發射時每枚所佔的份額相同。

第 (iii) 部分

在第 r 次發射時，只有貨車（連同其餘負載）和剛發射的拋射體的速度會改變。所以

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1}-v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r^2-u_{r-1}^2) + \tfrac{1}{2}m\big[(v-u_{r-1})^2-u_{r-1}^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1})(u_r+u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}m(v^2-2vu_{r-1}). \end{aligned}$$

由 $(*)$，$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$，所以第一項為 $\frac{1}{2}mv(u_r+u_{r-1})$。因此

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}mvu_r + \tfrac{1}{2}mvu_{r-1} + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} \\ &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r-u_{r-1}), \end{aligned}$$

即為所求。

把上式對 $r=1,\ldots,n$ 相加，並利用 $K_0=0$ 及 $u_0=0$，兩邊都伸縮相消：

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_n-u_0) = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n.$$

最後與第 (i) 部分比較。由於 $u = nmv/M$，

$$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv\,u.$$

由第 (ii) 部分得 $u_n < u$，而因為 $u>0$ 且 $n>1$，所以 $u < nu$。由於 $mv>0$，

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmvu = K.$$

所以 $K_n < K$：逐枚發射所釋放的動能較少。

驗算

- 取 $n=3$、$M=10$、$m=1$、$v=1$。則 $u=0.3$，而由 $(*)$ 得 $u_3 = \frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10} = \frac{181}{660} \approx 0.274$，比 u 小，正如預期。能量分別為 $K=1.95$ 及 $K_3 = \frac{2161}{1320} \approx 1.637$。
- 對 n、M、m 和 v 的數千組隨機取值，在每一發之後直接計算每個物體的動量和動能，結果與 $(*)$ 及 K_n 的公式完全吻合；這已經由電腦驗證。
- 極限情況：若 $m \ll M$，$(*)$ 的每一項都接近 mv/M，所以 $u_n \approx u$，而兩個能量都接近 $\frac{1}{2}nmv^2$。當貨車非常重時，發射的方式幾乎沒有影響。

常見錯誤

- 忘記未發射的拋射體隨貨車一起運動，在第 r 發之前用了質量 M 而不是 $M+(n-r+1)m$。

- 把拋射體的速度寫成 $-v$ 而不是 $u_{r-1} - v$：題目規定的是它相對於地面的速率為 $v - V$，而不是 v。
- 在 $K_r - K_{r-1}$ 中計入較早發射的拋射體的動能。它們不受影響，會互相抵消。

STEP 之外

這是火箭運動的離散版本。若把 n 發炮彈換成連續不斷的廢氣噴流，u_n 的總和便會變成積分，並得出齊奧爾科夫斯基火箭方程（Tsiolkovsky rocket equation），$\Delta u = v\ln(m_0/m_1)$。火箭的處境就像逐枚發射的貨車：它的燃料不可能在一瞬間全部燒完，所以要付出第 (ii) 部分所揭示的代價。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對變質量系統和火箭有詳細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。