詳細解答

STEP III 2017，第 10 題

力學 • 轉動的剛體

STEP III 2017，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q10

關鍵思路

在質點未滑動（slip）之前，桿與質點作為一個剛體（rigid body）一同繞鉸鏈（hinge）轉動，因此能量守恆（conservation of energy）可立即給出 $\dot{\theta}$，再求導便得 $\ddot{\theta}$。此時質點繞 P 作圓周運動，所以其加速度有熟悉的徑向（radial）分量和橫向（transverse）分量。單獨對質點應用牛頓第二定律（Newton's second law），沿桿方向及垂直於桿方向分解，便得到摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）；當摩擦力達到反作用力的 μ 倍時，質點開始滑動。

解答

能量方程

把質點視為質點模型（point mass），並假設鉸鏈光滑（smooth）。均勻桿繞其端點 P 的轉動慣量（moment of inertia）為 $\frac{1}{3}m(3a)^2 = 3ma^2$，而與 P 相距 ℓ 的質點則貢獻 $m\ell^2$。在沒有滑動時，整個系統是一個以角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ 繞 P 轉動的剛體，其動能（kinetic energy）為

$$\tfrac{1}{2}\left(3ma^2 + m\ell^2\right)\dot{\theta}^2.$$

當桿轉過角度 θ 時，其中點（與 P 相距 $\frac{3}{2}a$）下降了 $\frac{3}{2}a\sin\theta$，而質點下降了 $\ell\sin\theta$。鉸鏈的反作用力不作功（其作用點固定不動），而摩擦力和法向反作用力是系統的內力，在沒有滑動時不作淨功。由靜止開始，能量守恆給出

$$\tfrac{1}{2}m\left(3a^2 + \ell^2\right)\dot{\theta}^2 = mg\left(\tfrac{3}{2}a + \ell\right)\sin\theta,$$

兩邊乘以 $2/m$，即得

$$(3a^2 + \ell^2)\dot{\theta}^2 = g(3a + 2\ell)\sin\theta,$$

此即所求。

角加速度

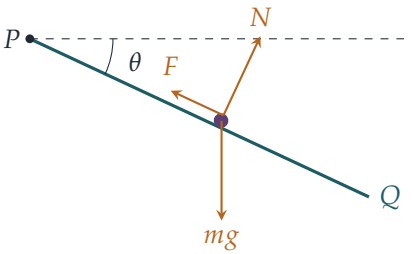
對 t 求導，得

$$2(3a^2+\ell^2)\dot\theta\,\ddot\theta = g(3a+2\ell)\cos\theta\,\dot\theta.$$

當 $t>0$ 時 $\dot\theta\neq 0$，故可兩邊除以 $2\dot\theta$（$t=0$ 時的結果可由連續性得出，或直接對 P 取力矩得出）：

$$\ddot\theta = \frac{g(3a+2\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

作用於質點的力



桿位於水平線下方，與水平成角 θ。桿對質點施加垂直於桿的法向反作用力 N（方向背離桿，因為質點位於桿的上方），以及沿桿方向的摩擦力 F，我們設其指向 P。質點繞 P 作半徑為 ℓ 的圓周運動，因此其加速度有一個垂直於桿、沿 θ 增加方向的分量 $\ell\ddot\theta$（向下並背離桿的上表面），以及一個沿桿指向 P 的分量 $\ell\dot\theta^2$。

在垂直於桿、沿 θ 增加的方向上，重力的分量為 $mg\cos\theta$，而 N 的方向相反：

$$mg\cos\theta - N = m\ell\ddot\theta.$$

沿桿指向 P 的方向上，重力的分量為 $-mg\sin\theta$（它把質點拉離 P）：

$$F - mg\sin\theta = m\ell\dot\theta^2.$$

法向反作用力

代入上面求得的 $\ddot\theta$，

$$N = mg\cos\theta - m\ell\ddot\theta = mg\cos\theta\left(1-\frac{\ell(3a+2\ell)}{2(3a^2+\ell^2)}\right)$$
$$= mg\cos\theta\,\frac{6a^2+2\ell^2-3a\ell-2\ell^2}{2(3a^2+\ell^2)} = \frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

由於 $\ell<2a$，因子 $2a-\ell$ 為正；而當 θ 為銳角時 $\cos\theta>0$。所以 $N>0$；特別地，在 θ 為銳角期間，法向反作用力不為零，質點保持與桿接觸。

開始滑動之時

由第二條方程及能量方程，

$$F = mg\sin\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta\left(1 + \frac{\ell(3a+2\ell)}{3a^2+\ell^2}\right)$$
$$= mg\sin\theta\,\frac{3a^2+3a\ell+3\ell^2}{3a^2+\ell^2} = \frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2}.$$

當 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 時此式為正，所以摩擦力確實如假設般指向 P：若沒有摩擦力，質點便會沿桿向外滑出。

想一想 為甚麼滑動的條件是 $F = \mu N$，而不是一條不等式？

在質點緊貼桿而不動時，摩擦力可提供不超過 μN 的任何大小的力，所以我們需要 $F \le \mu N$。當 $\theta = 0$ 時，$F = 0 < \mu N$。隨着 θ 增加，F 增大（與 $\sin\theta$ 成正比），而 N 減小（與 $\cos\theta$ 成正比），因此 F/N（它是 $\tan\theta$ 的一個正倍數）穩定遞增。質點在第一個使 $F = \mu N$ 的角度處即將滑動：

$$\frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2} = \mu\,\frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

約去 $3mg/(3a^2+\ell^2)$，再除以 $\cos\theta \neq 0$，得

$$\tan\theta = \frac{\mu a(2a-\ell)}{2(\ell^2+a\ell+a^2)},$$

此即所求。

若 $\ell > 2a$

N 的公式是在假設質點隨桿一同運動的前提下推導的。若 $\ell > 2a$，公式在 $\theta = 0$ 時給出 $N < 0$，這是不可能的：桿只能推質點，不能拉質點。所以即使在釋放的一刻，質點也不能隨桿一同運動。

要了解實際發生的情況，可單獨考慮桿。在釋放的一刻對 P 取力矩，

$$3ma^2\,\ddot{\theta} = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a},$$

因此桿上位於質點下方的點，起始時的向下加速度為 $\ell\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2a}g$；當 $\ell > 2a$ 時，這大於 g。桿下落得比質點自由下落還要快。所以在釋放的一刻，質點便離開桿（兩者之間的反作用力為零），開始在重力作用下自由下落，而桿則獨自擺下。

驗算

- 對整個系統繞 P 取力矩，得 $(3ma^2+m\ell^2)\ddot{\theta} = mg\cos\theta\,(\frac{3}{2}a+\ell)$，與對能量方程求導所得的 $\ddot{\theta}$ 相同。

- 邊界情況 $\ell = 2a$ 同時符合兩種情形：釋放時 $N = 0$，而桿上與 P 相距 $2a$ 的點起始加速度恰好為 g。
- 取 $a = \ell = 1$ 及 $\mu = 1$，滑動角滿足 $\tan\theta = \frac{1}{6}$；在該角度，上述公式給出 $F/N = 6\tan\theta = 1 = \mu$。$N$ 和 F 的公式亦已用電腦驗證：以數值方法逐步模擬運動，並直接由質點的位置計算其加速度。

常見錯誤

- 誤用繞中點的轉動慣量 $\frac{1}{12}m(3a)^2$，而非繞鉸鏈的轉動慣量；長度為 L 的桿繞一端的轉動慣量是 $\frac{1}{3}mL^2$。
- 在摩擦力的方程中漏掉向心（centripetal）項 $m\ell\dot{\theta}^2$；正是這一項令分子成為 $a^2 + a\ell + \ell^2$，而不是 a^2。
- 在法向方程中把 $\ell\ddot{\theta}$ 的符號弄錯：桿正以加速度離開質點，所以 N 小於 $mg\cos\theta$，而不是大於。

STEP 之外

最後一部分是一個經典的意外結果：下落中的鉸接桿上的某一點，其加速度可以大於 g。這解釋了為何放在下落間尺末端附近的硬幣（或傾倒中的煙囪）會被「拋離」。要系統地求出 N 和 F 這類約束力（constraint forces），方法是在極坐標（polar coordinates）中寫出運動方程；而日後學到的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）更會展示如何完全不涉及這些力而求得運動。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體轉動及這些極坐標下的加速度有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。