詳細解答

STEP III 2017，第 1 題

純數學 • 裂項相消級數的界限

> **STEP III 2017，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q1

關鍵思路

第 (i) 部分的恆等式（identity）把每個二項式係數（binomial coefficient）的倒數寫成一個常數乘以相鄰兩項的*差*，於是整個和式可以伸縮相消（telescoping）。在第 (ii) 部分，$1/n^3$ 不容易求和，但二項式係數的倒數卻可以：$\binom{n+1}{3}$ 和 $\binom{n+2}{5}$ 都是 n 的多項式，分別與 n^3 和 n^5 的倍數相近，所以我們可以把 $1/n^3$ 夾在兩個能用第 (i) 部分精確求和的式子之間。

解答

第 (i) 部分

記 $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$。於是

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}} &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r-1)!} - \frac{r!\,n!}{(n+r)!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!}[(n+r)-n] = \frac{r\cdot r!\,(n-1)!}{(n+r)!},\end{aligned}$$

其中我們利用 $(n+r)! = (n+r)\,(n+r-1)!$ 和 $n! = n\,(n-1)!$，提出了公因子 $r!\,(n-1)!/(n+r)!$。乘以 $\frac{r+1}{r}$，得

$$\frac{r+1}{r}\left(\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}}\right) = \frac{(r+1)!\,(n-1)!}{(n+r)!} = \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}},$$

因為 $(n+r)-(r+1) = n-1$。這就是所求的恆等式。

求和。設 $a_n = 1/\binom{n+r-1}{r}$，則恆等式可寫成 $1/\binom{n+r}{r+1} = \frac{r+1}{r}(a_n - a_{n+1})$。由 $n=1$ 加到

N，除了首項和末項外，其餘全部相消：

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}(a_1 - a_{N+1}) = \frac{r+1}{r}\left(1 - \frac{1}{\binom{N+r}{r}}\right),$$

因為 $a_1 = 1/\binom{r}{r} = 1$。當 $N \to \infty$ 時，$\binom{N+r}{r} \geq N + r \to \infty$（對 $r \geq 1$ 而言），所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}.$$

推論。取 $r = 2$，由 $n = 1$ 起的和為 $\frac{3}{2}$。$n = 1$ 那一項是 $1/\binom{3}{3} = 1$，所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

第 (ii) 部分

第一條不等式。對 $n \geq 3$，

$$\frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{3!}{(n+1)n(n-1)} = \frac{3!}{n^3 - n} > \frac{3!}{n^3},$$

因為 $0 < n^3 - n < n^3$（左邊的不等式成立是因為 $n \geq 2$）。

第二條不等式。我們有 $\binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n^2-1)$ 及 $\binom{n+2}{5} = \frac{1}{120}(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) = \frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)$。所以

$$\frac{20}{\binom{n+1}{3}} - \frac{1}{\binom{n+2}{5}} = \frac{120}{n(n^2-1)} - \frac{120}{n(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{120\,(n^2-5)}{n(n^2-1)(n^2-4)}.$$

當 $n \geq 3$ 時，因子 n、n^2-1、n^2-4 全部為正，所以此式小於 $120/n^3 = 5!/n^3$ 當且僅當

$$n^2(n^2-5) < (n^2-1)(n^2-4), \quad \text{即} \quad n^4 - 5n^2 < n^4 - 5n^2 + 4,$$

而這顯然成立。

想一想 我們需要第 (i) 部分中的哪些和式？它們由哪一項開始？

我們需要 $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$ 和 $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+2}{5}$。在第一個和式中設 $m = n-1$，它變成 $\sum_{m\geq 2} 1/\binom{m+2}{3} = \frac{1}{2}$，正正就是第 (i) 部分的推論。在第二個和式中設 $m = n-2$，它變成 $\sum_{m\geq 1} 1/\binom{m+4}{5}$，即第 (i) 部分取 $r = 4$ 的情況，得 $\frac{5}{4}$。

所涉及的級數全部收斂（convergent）（它們都是正項級數，並且如上述不等式所示，被收斂級數所界）。把收斂級數之間的嚴格不等式逐項相加，得到的仍是嚴格不等式，因為各個正差之和至少等於其首項，而首項是正數。記 $T = \sum_{n\geq 3} 1/n^3$。

上界。把第一條不等式對 $n \geq 3$ 求和：

$$6T < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad T < \frac{1}{12}.$$

下界。把第二條不等式對 $n \geq 3$ 求和：

$$120\,T > 20 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{35}{4}, \qquad \text{所以} \qquad T > \frac{35}{480} = \frac{7}{96}.$$

最後，$\sum_{n\geq 1} 1/n^3 = 1 + \frac{1}{8} + T$，而 $1 + \frac{1}{8} = \frac{108}{96}$。因此

$$\frac{108+7}{96} = \frac{115}{96} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{108}{96} + \frac{8}{96} = \frac{116}{96},$$

證畢。

驗算

- 以 $n = r = 1$ 測試恆等式：$1/\binom{2}{2} = 1$，而 $2\,(1/\binom{1}{1} - 1/\binom{2}{1}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$。
- 當 $r = 1$ 時，和為 $\sum 1/\binom{n+1}{2} = \sum \frac{2}{n(n+1)} = 2$，這是大家熟悉的伸縮和，與 $\frac{r+1}{r} = 2$ 吻合。
- 數值上 $\sum 1/n^3 \approx 1.20206$，而 $\frac{115}{96} \approx 1.19792$、$\frac{116}{96} \approx 1.20833$，所以上下界成立，並把該值確定在約 0.01 的範圍之內。

常見錯誤

- 移位後弄錯起始指標：$\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$ 由 $\binom{4}{3}$ 開始，這是第 (i) 部分推論中 $n = 2$ 的那一項，而不是 $n = 1$ 的那一項。
- 忘記加上 $n = 1, 2$ 時的項 $1 + \frac{1}{8}$，這兩項並不在不等式涵蓋的範圍內。

STEP 之外

數 $\sum 1/n^3$ 就是 $\zeta(3)$，稱為阿佩里常數（Apéry's constant）；與 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 不同，它沒有已知的閉合形式。阿佩里（Apéry）在 1978 年證明它是無理數（irrational），所用的正是與這裏相似的快速收斂級數。把一個級數與伸縮級數比較，以及把不等式逐項相加，都是大學第一個分析（analysis）課程的標準工具。如想仔細了解收斂性和比較判別法（comparison test），可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。