詳細解答

STEP II 2017，第 9 題

力學 • 摩擦力與剛體

STEP II 2017，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q9

關鍵思路

每個圓柱都是剛體（rigid body），而且只在兩處受力：木板和地面。因此第一步自然是對圓柱的中心取力矩（moments）：兩個法向反作用力（normal reaction）都通過中心，剩下的只有兩個摩擦力（friction），而它們必須相等。之後只需分別對圓柱和木板分解力（resolving），再代入接觸點的摩擦定律 $G \leq \frac{1}{2}R$ 和 $F \leq \frac{1}{2}N$。最後才用幾何關係把 θ 與 a 和 r 聯繫起來。

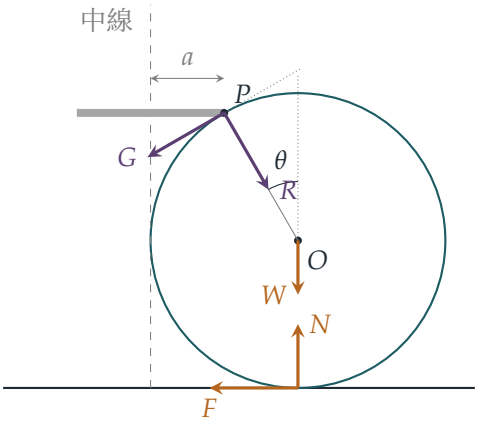
解答

模型與設定。 把橫截面看作兩個半徑為 r 的圓盤和一根水平桿，所有接觸點都是粗糙的。兩個圓柱之間的距離可忽略，所以它們的中心分別位於對稱鉛垂線兩側、水平距離為 r 之處。木板寬度為 $2a < 2r$，所以它以兩條長邊擱在兩個圓柱內側的上部。由對稱性，我們只需考慮右邊的圓柱。

設 P 為木板與該圓柱的接觸點。P 處的切線（tangent）與水平的木板成 θ 角，所以通往 P 的半徑與鉛垂線成 θ 角。作用在圓柱上的力為：

- 其重量 W，作用於中心 O；
- 在地面處，向上的法向反作用力 N 和摩擦力 F（指向中線，因為木板把圓柱向外推）；
- 在 P 處，沿 PO 方向的法向反作用力 R，以及沿切線方向、指向下方和內側的摩擦力 G。

根據牛頓第三定律（Newton's third law），木板受到沿 OP 方向的 R（向上、背離中線），以及沿切線方向、指向上方和外側的 G。



通過 P 的虛線是切線。在水平方向上，P 比中心 O 更靠內 $r\sin\theta$，而 O 與中線的距離為 r。

第 (i) 部分

對圓柱取關於 O 的力矩。W、N 和 R 都通過 O。兩個摩擦力都與圓相切，所以各自的力矩為（力）$\times r$，而且轉動方向相反：F 在底部，指向內側；G 在 P 處，指向下方和內側。因此

$$Fr = Gr \quad \Longrightarrow \quad G = F.$$

對圓柱作水平分解（以向外為正）：R 的水平分量為向外的 $R\sin\theta$，G 的分量為向內的 $G\cos\theta$，而地面摩擦力 F 向內，所以

$$R\sin\theta - G\cos\theta - F = 0.$$

由於 $G = F$，上式即

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

此即所求。

推論。木板處沒有滑動，所以該處的摩擦力滿足 $G \le \frac{1}{2}R$，即 $F \le \frac{1}{2}R$。於是

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta) \le \tfrac{1}{2}R(1+\cos\theta),$$

兩邊除以 $\frac{1}{2}R > 0$（木板壓在圓柱上），得 $2\sin\theta \le 1+\cos\theta$。

第 (ii) 部分

對木板作鉛垂分解。每條邊都受到 R，其向上分量為 $R\cos\theta$；又受到沿切線向上的 $G = F$，其向上分量為 $F\sin\theta$。所以

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = kW.$$

由第 (i) 部分，$R = \dfrac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$，所以

$$R\cos\theta + F\sin\theta = \frac{F\left[(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\right]}{\sin\theta} = \frac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta},$$

這是因為 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。因此

$$\tfrac{1}{2}kW = \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}F.$$

（由對稱性，木板所受的水平力互相抵消，力矩亦然。）

對圓柱作鉛垂分解。木板施加的反作用力向下推，大小為 $R\cos\theta + G\sin\theta = \frac{1}{2}kW$，所以

$$N = W + \tfrac{1}{2}kW = \left(\frac{2}{k}+1\right)\tfrac{1}{2}kW = \left(1+\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)F.$$

這就是所求的表達式。（這不過是顯而易見的事實：地面承受總重量 $2W + kW$ 的一半。）

地面處沒有滑動。條件為

$$F \le \tfrac{1}{2}N.$$

由 N 的表達式，

$$\frac{N}{F} = \left(1+\frac{2}{k}\right)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

由於 θ 為銳角時 $\sin\theta > 0$，第 (i) 部分給出 $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ge 2$；又因 $k > 0$，有 $1 + \frac{2}{k} > 1$。所以 $N/F > 2$，即 $F < \frac{1}{2}N$。因此只要木板不滑動，地面的條件便自動成立，對 θ 沒有額外限制。

> **想一想** 兩個接觸點的摩擦力同樣是 F，為何地面接觸點的條件會「免費」成立？

因為地面壓得更用力。比較 R 和 N 的公式，得 $N = \left(1+\frac{2}{k}\right)R > R$，因為地面還要承受圓柱本身的重量。兩個接觸點的摩擦力相同，而地面的法向力較大，所以總是木板接觸點先滑動。

第 (iii) 部分

把第 (i) 部分的不等式移項後平方。兩邊都是正數，所以平方後不等號方向不變：

$$4\sin^2\theta \le (1+\cos\theta)^2 \iff 4(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) \le (1+\cos\theta)^2.$$

除以 $1+\cos\theta > 0$，得 $4 - 4\cos\theta \le 1 + \cos\theta$，即 $\cos\theta \ge \frac{3}{5}$。由於 θ 為銳角，

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \le \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \tfrac{4}{5}.$$

（等價地，設 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$，則不等式變為 $2t \le 1$，而 $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 時最大為 $\frac{4}{5}$。）

幾何關係。木板的邊 P 與中線的水平距離為 a。中心 O 與中線的距離為 r，而 P 比 O 更接近中線 $r\sin\theta$。所以

$$a = r - r\sin\theta = r(1-\sin\theta) \geq r\left(1-\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{5}r,$$

由此得 $r \leq 5a$。

驗算

- 在極端情況 $\sin\theta = \frac{4}{5}$、$\cos\theta = \frac{3}{5}$ 下，取 $W = 1$ 及 $k = 1$。木板的方程給出 $F = \frac{1}{4}$，於是 $R = \frac{1}{2}$、$N = \frac{3}{2}$。所以 $G/R = \frac{1}{2}$ 恰好成立（木板處於將要滑動的狀態），而 $F/N = \frac{1}{6}$，遠低於 $\frac{1}{2}$，與第 (ii) 部分的預測一致。
- 四條平衡（equilibrium）方程（力矩方程，以及對兩個物體的分解）都經電腦以 10^5 組隨機的 W、k 和 θ 驗證。同時亦驗證了：$G \leq \frac{1}{2}R$ 成立當且僅當 $\sin\theta \leq \frac{4}{5}$，而此時 $F < \frac{1}{2}N$ 總是成立。
- 極限情況的合理性：寬木板（$a \to r$）擱在接近圓柱頂部的位置，所以 $\theta \to 0$，幾乎不需要摩擦力。窄木板則深深卡在兩個圓柱之間，最終會從兩者之間滑下去。

常見錯誤

- 漏掉力矩方程，因而沒有發現 $G = F$。沒有這一點，未知數就太多了。
- 弄錯木板處摩擦力的方向：兩個圓柱有向兩旁滾開的趨勢，所以作用在圓柱上的摩擦力指向下方和內側。
- 寫成 $a = r\sin\theta$ 而不是 $a = r(1-\sin\theta)$：a 是從中線量起的，而不是從圓柱的中心量起。

STEP 之外

這是一個小型的靜定（statically determinate）系統：三個物體，方程數目足以確定每一個力，而摩擦力給出的不等式則劃定了可能的位置。在大學一年級的課程中，同樣的概念會以剛體平衡條件（合力為零及合力矩為零）的形式再次出現，之後又會在楔入與卡死（wedging and jamming）的研究中出現。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體靜力學和摩擦力有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。