詳細解答

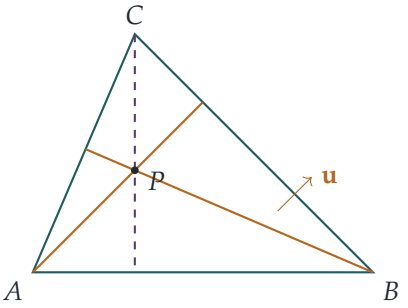
STEP II 2017，第 8 題

純數學 • 向量與垂心

> **STEP II 2017，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q8

關鍵思路

這是用向量證明三角形三條高（altitude）相交於同一點，即垂心（orthocentre）。要求兩條直線 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ 的交點，竅門是把方程與一個垂直於 $\mathbf{v}$ 的向量取純量積（scalar product）：這樣一下子就消去了 μ。這裏這樣的向量已經現成給了我們，因為 $\mathbf{v}$ 垂直於 CA，所以 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 正好合用。



解答

第一條高

通過 A 且垂直於 BC 的直線經過 $\mathbf{a}$，方向為 $\mathbf{u}$（我們身處平面之中，所以每個垂直於 BC 的向量都是 $\mathbf{u}$ 的倍數）。其方程為

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}.$$

同理，通過 B 且垂直於 CA 的直線是 $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$。

求 P

這兩條直線並不平行：若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 平行，那麼在同一平面上分別垂直於它們的 BC 與 CA 便會平行，這對三角形來說是不可能的。因此兩線恰好相交於一點 P，在該點有

$$\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}.$$

把兩邊都與 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 取純量積。由於 $\mathbf{v}$ 垂直於 CA，$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$，於是 μ 消失：

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}),\qquad\text{所以}\qquad\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

> ? **想一想** 我們可以除以 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 嗎？

可以。若 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$，則 $\mathbf{u}$ 既垂直於 BC，亦垂直於 CA；在平面上，這迫使 CA 與 BC 平行，但它們並不平行。因此

$$\mathbf{p}=\mathbf{a}+\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}\,\mathbf{u}.$$

CP 垂直於 AB

我們需要證明 $(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$。以 λ 記上面求得的係數，則

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

有用的觀察是：由於 $\mathbf{u}$ 垂直於 BC，$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$，所以

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})+\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

因此 $\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$，而

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=-(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0.$$

> ? **想一想** 純量積為零，真的能給出一條直線 CP 嗎？

只有在 $P\neq C$ 時才行，而這正是用到「非直角」這個條件的地方。若 $P=C$，則 C 位於通過 A 且垂直於 BC 的直線上，於是 $AC\perp BC$，C 處的角是直角，而這已被排除。所以 $\mathbf{p}-\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$；又因 $\mathbf{b}-\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$，純量積為零正好表示 CP 垂直於 AB。因此三角形的三條高都通過 P。

驗算

取 $A=(0,0)$、$B=(5,0)$、$C=(1.5,3.5)$ 及 $\mathbf{u}=(1,1)$，它垂直於 $\mathbf{c}-\mathbf{b}=(-3.5,3.5)$。於是 $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=7.5$，$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=5$，所以 $\lambda=1.5$，$P=(1.5,1.5)$。這一點位

於 C 的正下方，所以 CP 是鉛垂的，垂直於 AB；而 $(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (-3.5)(1.5)+(1.5)(3.5) = 0$，所以 P 亦在由 B 出發的高上。一般結果亦已用電腦在大量隨機三角形上驗證過。另請留意，若把 $\mathbf{u}$ 換成 $k\mathbf{u}$，$\mathbf{p}$ 的公式不變，這是理所當然的。

常見錯誤

- 與 $\mathbf{v}$ 或 $\mathbf{u}$ 而非與 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 作點積：這樣方程中兩個參數都會留下。
- 除以 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 時沒有說明它為何不等於零。
- 漏掉 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 這一步，而最後能夠相消，靠的正是這一步。

STEP 之外

任何三角形的垂心 H、形心(centroid)G 與外心(circumcentre)O 都位於同一直線上，即歐拉線(Euler line)，且 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$；若以 O 為原點，這就是簡潔的命題 $\mathbf{h} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$，你可以用同樣的純量積思路來證明它。這類純量積正是大學線性代數（linear algebra）入門課程中所研究的內積空間（inner-product space）的起點；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是看它們如何發展下去的好地方。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。