詳細解答

STEP II 2017，第 7 題

純數學 • 對數微分法

> **STEP II 2017，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q7

關鍵思路

這裏每一個冪都是透過對數（logarithm）來定義的，即 $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$，所以比較 x 的兩個冪，就等於比較它們的對數；由於 exp 是遞增（increasing）函數，兩種比較是等價的。唯一要留意的是 $\ln x$ 的正負號：當 $0 < x < 1$ 時它是負數，而除以負數會令不等式反向。取對數亦令求導數（derivative）變得直截了當。

解答

全文中，$\ln \mathrm{f}(x) = x\ln x$ 及 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x)\ln x$。

第 (i) 部分

設 $0 < x < 1$，則 $\ln x < 0$ 且 $x - 1 < 0$。於是

$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln x = x\ln x - \ln x = (x-1)\ln x > 0,$$

因為這是兩個負數的乘積。由於 exp 是遞增的，所以 $\mathrm{f}(x) > x$。

此外 $x\ln x < 0$，所以 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x\ln x} < 1$。現在再比較對數：

$$\begin{aligned} \ln \mathrm{g}(x) - \ln x &= (\mathrm{f}(x)-1)\ln x > 0, && \text{因為} \mathrm{f}(x) < 1 \text{ 且 } \ln x < 0, \\ \ln \mathrm{f}(x) - \ln \mathrm{g}(x) &= (x - \mathrm{f}(x))\ln x > 0, && \text{因為} \mathrm{f}(x) > x \text{ 且 } \ln x < 0. \end{aligned}$$

所以 $\ln x < \ln \mathrm{g}(x) < \ln \mathrm{f}(x)$，由此得出當 $0 < x < 1$ 時 $x < \mathrm{g}(x) < \mathrm{f}(x)$，正如所求。

當 $x > 1$ 時，同樣的差仍然適用，但此時 $\ln x > 0$、$x - 1 > 0$ 及 $x\ln x > 0$，所以 $\mathrm{f}(x) > 1$。於是由 $(x-1)\ln x > 0$ 得 $\mathrm{f}(x) > x$，而由 $(x - \mathrm{f}(x))\ln x < 0$ 得 $\mathrm{g}(x) > \mathrm{f}(x)$。

所以

$$x < \mathrm{f}(x) < \mathrm{g}(x) \qquad \text{當} x > 1,$$

而在 $x = 1$ 時三者皆等於 1。

第 (ii) 部分

對 $\ln \mathrm{f}(x) = x \ln x$ 求導，得 $\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x) = \ln x + 1$，所以

$$\mathrm{f}'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

由於 $x^x > 0$，$\mathrm{f}'(x) = 0$ 當且僅當 $\ln x = -1$，即 $x = \mathrm{e}^{-1}$。（f′ 在該處由負變正，所以這是極小值（minimum），其值為 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0.692$。）

第 (iii) 部分

當 $x \to 0$ 時，$x \ln x \to 0$，而 exp 是連續（continuous）的，所以

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x \ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1.$$

接着 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) \ln x$，其中 $\mathrm{f}(x) \to 1$ 而 $\ln x \to -\infty$，所以 $\ln \mathrm{g}(x) \to -\infty$，因此

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{g}(x) = 0.$$

第 (iv) 部分

對 $x > 0$，設 $h(x) = x^{-1} + \ln x$。則

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

它在 $0 < x < 1$ 時為負，在 $x > 1$ 時為正。所以 h 先遞減後遞增，其最小值為 $h(1) = 1$。因此對所有 $x > 0$，$x^{-1} + \ln x \geq 1$。

現在用積法則（product rule）對 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) \ln x$ 求導，並利用第 (ii) 部分：

$$\frac{\mathrm{g}'(x)}{\mathrm{g}(x)} = \mathrm{f}'(x) \ln x + \frac{\mathrm{f}(x)}{x} = x^x \left[(\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right].$$

? **想一想** 剛證明的不等式怎樣幫助處理這個括號？

括號內正好包含 $\frac{1}{x} + \ln x$，而它至少是 1。所以

$$(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \;\geq\; (\ln x)^2 + 1 \;>\; 0.$$

由於 $\mathrm{g}(x) > 0$ 及 $x^x > 0$，我們得到

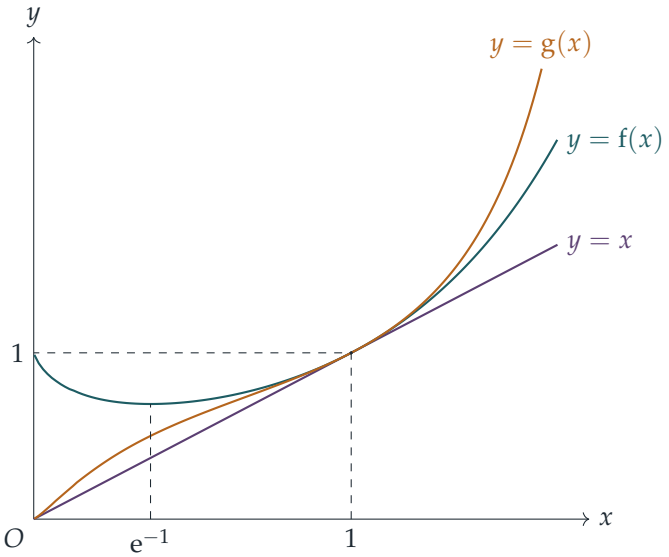
$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{g}(x)\, x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right] > 0 \qquad \text{對所有} x > 0,$$

正如所求。

草圖

把各項事實匯集起來：

- 當 $x \to 0$ 時，$y = \mathrm{f}(x)$ 從 1 開始，下降至 $x = \mathrm{e}^{-1}$ 處的極小值 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$，然後上升經過 $(1,1)$，並增長得非常快。在 0 附近它非常陡峭，因為 $\mathrm{f}'(x) = x^x(\ln x + 1) \to -\infty$。
- $y = \mathrm{g}(x)$ 從原點開始，並一直遞增（第 (iv) 部分），經過 $(1,1)$。
- 當 $0 < x < 1$ 時，次序為 $x < \mathrm{g} < \mathrm{f}$；當 $x > 1$ 時，次序為 $x < \mathrm{f} < \mathrm{g}$。所以 g 與 f 在 $(1,1)$ 相交，而三條曲線都在該處相遇。
- 在 $x = 1$：$\mathrm{f}'(1) = 1$ 及 $\mathrm{g}'(1) = 1 \cdot 1 \cdot (0 + 0 + 1) = 1$，所以兩條曲線都在 $(1,1)$ 與 $y = x$ 相切。
- 在原點附近 $\mathrm{g}(x)/x = \mathrm{e}^{(\mathrm{f}(x)-1)\ln x} \to 1$（因為 $\mathrm{f}(x) - 1 \approx x\ln x$，指數的表現類似 $x(\ln x)^2 \to 0$），所以 $y = \mathrm{g}(x)$ 沿着 $y = x$ 離開原點，並略高於它。



驗算

- 在 $x = \frac{1}{2}$：$\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 及 $\mathrm{g} = (\frac{1}{2})^{0.707} \approx 0.613$，所以 $0.5 < 0.613 < 0.707$。在 $x = 2$：$\mathrm{f} = 4$ 及 $\mathrm{g} = 2^4 = 16$，所以 $2 < 4 < 16$。
- $\mathrm{f}(0.3) \approx 0.697$、$\mathrm{f}(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0.6922$ 及 $\mathrm{f}(0.4) \approx 0.693$，與在 e^{-1} 處取極小值相符。
- g' 的公式給出 $\mathrm{g}'(\frac{1}{2}) \approx 0.774$，與 g 在該處的差商（difference quotient）吻合；電腦驗算亦確認了在 $(0,3)$ 上 $\mathrm{g}' > 0$。

常見錯誤

- 忘記在 $(0,1)$ 上 $\ln x < 0$，因而除以它時沒有把不等式反向；這正正是次序在 $x = 1$ 處對調的原因。
- 把 x^x 的導數寫成 $x \cdot x^{x-1}$（把指數（index）當作常數），或寫成 $x^x \ln x$（把底（base）當作常數）；兩部分都是需要的。
- 把 g 的極限（limit）寫成 $1^{-\infty}$ 然後靠猜；應改為處理 $\ln \mathrm{g} = \mathrm{f} \ln x$。

STEP 之外

冪塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ 延續了這個規律：當 $0 < x < 1$ 時，奇數層的冪塔 $x, \mathrm{g}, \ldots$ 與偶數層的冪塔 $\mathrm{f}, \ldots$ 互相交錯；而無窮冪塔收斂（converges）當且僅當 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \le x \le \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$，這是關於單調數列（monotone sequences）和不動點（fixed points）的一道好練習。像 $x \ln x \to 0$ 這類極限，以及透過 exp 和 ln 嚴謹地定義 a^b，都會在大學第一個分析（analysis）課程中得到妥善處理；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。