詳細解答

STEP II 2017，第 6 題

純數學 • 不等式與數學歸納法

STEP II 2017，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q6

關鍵思路

兩部分都是把和 S_n 與 $2\sqrt{n}$ 比較，而 $2\sqrt{n}$ 大約等於 $\int_0^n x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$。在第 (i) 部分的歸納法（induction）中，由 n 推到 $n+1$ 的一步，歸結為比較 $1/\sqrt{n+1}$ 與 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，而把這個差有理化（rationalising）便可解決。在第 (ii) 部分，最小的 C 就是右方（不計 C）與 S_n 之間差距的最大值。因此我們研究這個差距由 n 到 $n+1$ 如何變化，而題目給出的不等式（inequality）正好告訴我們這個差距總是在縮小。

解答

第 (i) 部分

設 $P(n)$ 為命題 $S_n \le 2\sqrt{n}-1$。

基本情況。$S_1 = 1$ 而 $2\sqrt{1}-1=1$，所以 $P(1)$ 成立（等號成立）。

歸納步驟。假設對某個 $k \ge 1$，$P(k)$ 成立。那麼

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

所以只需證明

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}, \qquad \text{即是} \qquad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

有理化後，

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \ge \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

因為 $\sqrt{k} \le \sqrt{k+1}$ 使分母不大於 $2\sqrt{k+1}$。因此 $S_{k+1} \le 2\sqrt{k+1} - 1$，這正是 $P(k+1)$。

由於 $P(1)$ 為真，而且對每個 $k \ge 1$ 都有 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$，所以對所有正整數 n，$S_n \le 2\sqrt{n} - 1$。

第 (ii) 部分：不等式

當 $k \ge 0$ 時，$(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$ 的兩邊都是非負的，而且左方是正數，所以這個不等式等價於兩邊平方後的不等式。現在

$$\begin{aligned}(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k &= (16k^2+8k+1)(k+1) - (16k^2+24k+9)k \\ &= (16k^3+24k^2+9k+1) - (16k^3+24k^2+9k) \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

所以 $(4k+1)^2(k+1) > (4k+3)^2 k$，取正平方根便得對所有 $k \ge 0$，$(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$，得證。

第 (ii) 部分：最小的 C

定義

$$T_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - S_n.$$

不等式 $S_n \ge 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - C$ 與 $C \ge T_n$ 相同。所以它對每個 n 都成立，當且僅當 C 不小於每一個 T_n；而最小的這樣的 C 就是 T_n 的最大值（如果存在的話）。

想一想 在不知道 S_n 的公式的情況下，怎樣找出最大的 T_n？

我們考慮變化量 $T_{n+1} - T_n$，在其中 S_n 會消去。由於 $S_{n+1} - S_n = 1/\sqrt{n+1}$，

$$\begin{aligned}T_{n+1} - T_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

兩邊乘以正數 $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$：

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\,(T_{n+1} - T_n) &= 4(n+1)\sqrt{n} - 4n\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \\ &= (4n+3)\sqrt{n} - (4n+1)\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

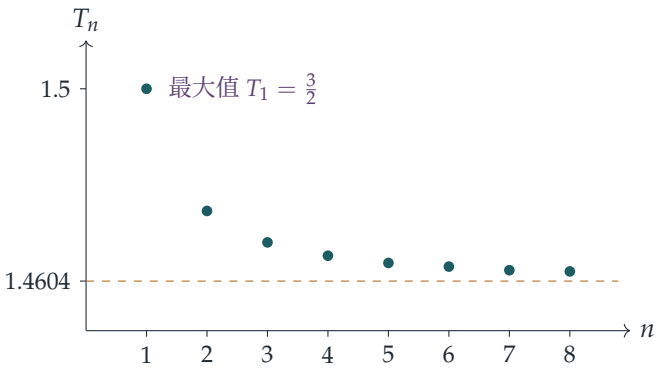
根據剛才證明的不等式（取 $k = n$），這是負數。因此對每個 $n \ge 1$ 都有 $T_{n+1} < T_n$：數列（sequence）T_n 嚴格遞減（strictly decreasing），其最大值就是第一項，

$$T_1 = 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{3}{2}.$$

所以對所有 $n \geq 1$，$S_n \geq 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{3}{2}$。任何更小的 C 都不行，因為在 $n = 1$ 時不等式變成 $1 \geq \frac{5}{2} - C$，這要求 $C \geq \frac{3}{2}$。所求的最小數是

$$C = \tfrac{3}{2}.$$

T_n 的首幾個值顯示它穩定下來的速度有多快：



（縱軸經過拉伸：它的範圍大約由 1.45 至 1.51。）

驗算

- 當 $n = 4$：$S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \approx 2.7845$，它介乎 $2\sqrt{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 2.75$ 與 $2\sqrt{4} - 1 = 3$ 之間，符合兩個結果的要求。
- 用電腦檢查首 200 000 個值，確認了兩個界都成立，而且 T_n 遞減；T_n 由 1.5 下降，趨向大約 1.46035，並且永不回到 1.5。
- 恆等式 $(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k = 1$ 很容易在 $k = 1$ 時驗證：$25 \cdot 2 - 49 = 1$。

常見錯誤

- 以 T_n 的極限（大約 1.46）作答，而不是它的最大值。小於 $\frac{3}{2}$ 的 C 在 $n = 1$ 時不成立。
- 把不等式平方之前，沒有先指出兩邊都是非負的。
- 忘記證明 $C = \frac{3}{2}$ 確實是最小的，即沒有指出等號成立的情況。

STEP 之外

數列 T_n 遞減至一個極限，而這個極限是 $-\zeta(\frac{1}{2}) \approx 1.46035$，其中 ζ 是黎曼 zeta 函數（Riemann zeta function），並已延拓至其定義級數收斂的區域以外。把和與積分比較，

再以像 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 這樣的項作修正，正是歐拉－麥克勞林公式（Euler–Maclaurin formula）的起點。背後的基本事實——有界的單調數列必定收斂——就是大學一年級分析課中的單調收斂定理（monotone convergence theorem）；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對此有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。