詳細解答

STEP II 2017，第 5 題

純數學 • 拋物線的法線與圓

STEP II 2017，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q5

關鍵思路

一切都建基於拋物線（parabola）$x = at^2, y = 2at$ 的一個事實：連接參數（parameter）為 t_1 和 t_2 兩點的弦（chord），其斜率（gradient）為 $\dfrac{2}{t_1 + t_2}$。有了這個事實，「法線與曲線再次相交」和「半圓上的圓周角是直角」都變成參數之間的簡單方程，幾何問題便化為簡短的代數運算。

解答

一個有用的事實：弦的斜率

對於相異參數 $t_1 \neq t_2$，連接 $(at_1^2, 2at_1)$ 與 $(at_2^2, 2at_2)$ 的弦的斜率為

$$\frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2},$$

這裏約去了 $t_1 - t_2 \neq 0$。（若 $t_1 + t_2 = 0$，則該弦是鉛垂的。）令 $t_2 \to t_1$，可知在 t 處的切線（tangent）斜率為 $\frac{1}{t}$；直接計算亦得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$。

第 (i) 部分

在 P 處切線斜率為 $\frac{1}{p}$，故法線（normal）斜率為 $-p$（這裏用到 $p \neq 0$）。點 N（其中 $n \neq p$）在這條法線上，當且僅當弦 PN 的斜率為 $-p$：

$$\frac{2}{p + n} = -p \iff p + n = -\frac{2}{p} \iff n = -\left(p + \frac{2}{p}\right).$$

（弦 PN 不可能是鉛垂的，因為 P 處的法線斜率 $-p$ 是有限的。）注意 $n \neq p$，因為 $n - p = -2(p + \frac{1}{p})$，而對實數 p 而言 $p + \frac{1}{p} \neq 0$，所以這的確是另一個點。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

利用 $p + n = -\frac{2}{p}$ 及 $p - n = 2p + \frac{2}{p} = \dfrac{2(p^2+1)}{p}$，

$$\begin{aligned} |PN|^2 &= a^2(p^2-n^2)^2 + 4a^2(p-n)^2 \\ &= a^2(p-n)^2[(p+n)^2+4] \\ &= a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \left(\frac{4}{p^2}+4\right) = a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \frac{4(p^2+1)}{p^2} \\ &= 16a^2 \, \frac{(p^2+1)^3}{p^4}, \end{aligned}$$

正如所求。

為求最小值，設 $u = p^2 > 0$ 及 $f(u) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$。由商法則（quotient rule），

$$f'(u) = \frac{3(u+1)^2u^2 - 2u(u+1)^3}{u^4} = \frac{(u+1)^2(3u-2u-2)}{u^3} = \frac{(u+1)^2(u-2)}{u^3}.$$

當 $u > 0$ 時，因子 $\frac{(u+1)^2}{u^3}$ 為正，所以當 $0 < u < 2$ 時 $f'(u) < 0$，當 $u > 2$ 時 $f'(u) > 0$。因此 f 先遞減後遞增，其在 $u > 0$ 上的最小值出現在 $u = 2$，即 $p^2 = 2$。由於 $|PN|^2 = 16a^2 f(p^2)$，這亦使 $|PN|$ 取得最小值。（最小值為 $|PN|^2 = 16a^2 \cdot \frac{27}{4} = 108a^2$，故 $|PN| = 6\sqrt{3}\,a$。）

第 (iii) 部分

由於 PN 是直徑（diameter），而 Q 是圓上異於 P 和 N 的點，所以角 PQN 是直角（半圓上的圓周角（angle in a semicircle））。因此 $QP \perp QN$。

想一想 QP 或 QN 會否是鉛垂的，以致我們不能把斜率相乘？

若 QP 是鉛垂的，則 QN 是水平的，於是 Q 和 N 的 y 坐標相同，得 $q = n$，但由於 $Q \neq N$，這是不可能的。同理，若 QN 是鉛垂的，則 QP 必為水平，得 $q = p$。所以兩個斜率都是有限且非零的，而它們的乘積為 -1：

$$\frac{2}{q+p} \cdot \frac{2}{q+n} = -1 \iff (q+p)(q+n) = -4.$$

展開，並利用第 (i) 部分的 $p + n = -\frac{2}{p}$ 及 $pn = -p^2 - 2$，

$$q^2 + (p+n)q + pn = q^2 - \frac{2q}{p} - p^2 - 2 = -4,$$

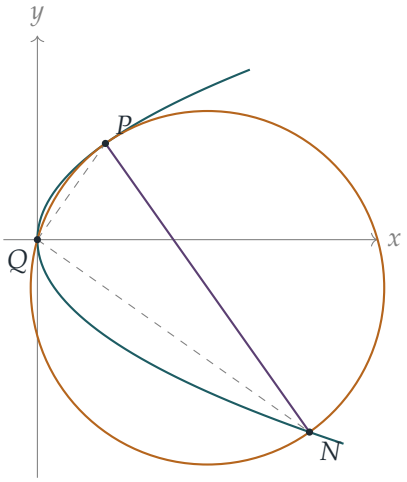
整理後得

$$2 = p^2 - q^2 + \frac{2q}{p},$$

正如所求。

推論。代入 $q = 0$：關係式變成 $2 = p^2$。反之，若 $p^2 = 2$，關係式給出 $q^2 - \frac{2q}{p} = 0$，即 $q = 0$ 或 $q = \frac{2}{p}$；但 $\frac{2}{p} = \frac{p^2}{p} = p$，這就是點 P 本身，所以 Q 必有 $q = 0$。因此 Q 位於原點當且僅當 $p^2 = 2$，而由第 (ii) 部分，這恰好就是 $|PN|$ 取最小值的情況。

一般而言，該關係式是一條二次方程 $q^2 - \frac{2}{p}q + (2 - p^2) = 0$，其兩根之和為 $\frac{2}{p}$；其中一根必定是 $q = p$，所以另一根為 $q = \dfrac{2 - p^2}{p}$，它為零當且僅當 $p^2 = 2$。



上圖顯示取最小值的情況 $a = 1$, $p = \sqrt{2}$：法線 PN（梅紫色）、以 PN 為直徑的圓（琥珀色），以及在 $Q = O$ 處的直角。

驗算

- 取 $a = 1$, $p = 1$：$n = -3$，所以 $P = (1, 2)$ 及 $N = (9, -6)$。於是 $|PN|^2 = 64 + 64 = 128$，而公式給出 $16 \cdot 8/1 = 128$。
- 取 $p = \sqrt{2}$, $a = 1$：$P = (2, 2\sqrt{2})$，$N = (8, -4\sqrt{2})$，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{ON} = 16 - 16 = 0$，所以原點確實在以 PN 為直徑的圓上。此時 $|PN| = 6\sqrt{3} \approx 10.392$。
- 對多個 p 值以數值方法找出圓與拋物線的交點，除 P 外，所得的參數恰好就是 n 和 $\frac{2-p^2}{p}$。

常見錯誤

- 忘記 $q = p$ 亦滿足最後的關係式，因而錯誤地斷定當 $p^2 = 2$ 時 Q 有兩個可能位置。
- 把法線斜率寫成 $-\frac{1}{p}$：切線斜率是 $\frac{1}{p}$，所以法線斜率是 $-p$。

STEP 之外

一個圓與一條拋物線一般相交於四點；把 $x = at^2, y = 2at$ 代入圓的方程，會得到一條關於 t 且沒有 t^3 項的四次方程（quartic），所以四個參數之和為零。這裏 $n + q = -\frac{2}{p} - p + \frac{2}{p} = -p$，所以第四個參數又是 p：圓在 P 處與拋物線相切。這是必然的，因為圓在該處的半徑正沿着法線方向。像這樣按重數（multiplicity）計算交點數目，正是代數幾何（algebraic geometry）的起點（貝祖定理（Bézout's theorem））。如想做更多這類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。