詳細解答

STEP II 2017，第 4 題

純數學 • 柯西–施瓦茲積分不等式

> **STEP II 2017，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q4

關鍵思路

施瓦茨不等式（Schwarz inequality）以平方的積分 $\int f^2$ 和 $\int g^2$ 為乘積的積分 $\int fg$ 提供一個上界（upper bound）。因此，整個技巧在於選取 f 和 g，使得每一個積分都能算出來，唯一可能例外的就是我們想估計的那一個。如果想估計的積分是 $\int fg$，我們得到的是上界；如果它是 $\int f^2$ 或 $\int g^2$，兩邊相除後得到的便是下界（lower bound）。

解答

以下一律把 $(*)$ 寫成 $\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \cdot \int g^2$。

第 (i) 部分

目標式中含有 e^t，所以取 $f(x) = 1$、$g(x) = \mathrm{e}^x$、$a = 0$ 及 $b = t$。於是

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t - 1, \qquad \int_0^t 1 \,\mathrm{d}x = t, \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1),$$

因此 $(*)$ 給出

$$(\mathrm{e}^t - 1)^2 \le \frac{t}{2}\,(\mathrm{e}^{2t} - 1) = \frac{t}{2}\,(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1).$$

由於 $t > 0$，有 $\mathrm{e}^t - 1 > 0$，而且 $\mathrm{e}^t + 1 > 0$。除以正數 $(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1)$ 不會改變不等號的方向：

$$\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} \le \frac{t}{2},$$

得證。

第 (ii) 部分

我們希望 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ 以 $\int g^2$ 的形式出現，所以在 $[0,1]$ 上取 $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$ 及 $f(x)=x$。乘積 $x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$ 正是我們能夠積分的那一類（指數外面的 x 冪，在相差一個常數的意義下，正是指數的導數）：

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\right]_0^1=2(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}),\qquad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

因此 $(*)$ 給出

$$4(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})^2\le\frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

兩邊乘以 3，得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\ge 12(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})^2.$$

第 (iii) 部分

記 $J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$。這裏所有積分都在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上進行，該區間內 $\sin x\ge 0$ 且 $\cos x\ge 0$，所以所有根式都是實數。

上界。這裏 J 應當是 $\int fg$。取 $f(x)=1$ 及 $g(x)=\sqrt{\sin x}$，使得 $g^2=\sin x$ 容易積分：

$$J^2\le\int_0^{\frac{1}{2}\pi}1\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot 1.$$

由於 $J>0$，取正平方根得 $J\le\sqrt{\pi/2}$。

下界。現在 J 必須是其中一個平方的積分，所以取 $f(x)=(\sin x)^{1/4}$，使得 $f^2=\sqrt{\sin x}$。

> ? **想一想** 哪一個 g 能使 $\int fg$ 和 $\int g^2$ 都可以算出來？

我們需要 g^2 容易積分，同時 $(\sin x)^{1/4}g(x)$ 也容易積分。選取 $g(x)=\cos x$ 兩者兼顧：$(\sin x)^{1/4}\cos x$ 是 $\sin x$ 的冪乘以它的導數。答案的形式也是一條線索：分母中的 π 暗示 $\int g^2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$。事實上

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{1/4}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{4}{5}(\sin x)^{5/4}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{4}{5}$$

以及

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

因此 $(*)$ 給出

$$\frac{16}{25}\le J\cdot\frac{\pi}{4},\qquad \text{即}\qquad J\ge\frac{64}{25\pi}.$$

把兩部分合起來，

$$\frac{64}{25\pi} \le \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

附註。其他選取方法也行得通，有些效果更好。取 $f = (\sin x)^{1/4}$、$g = (\sin x)^{3/4}$，得 $1 \le J\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$；再以 $f = \sin x$、$g = \sqrt{\sin x}$ 第二次應用 $(*)$，可證 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\pi/4}$。兩者結合，得到更精確的下界 $J \ge 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$。

驗算

- (i)：當 $t \to 0$ 時，左邊是 $\tanh(t/2) \approx t/2$，所以對於細小的 t，這個界是緊的。當 t 很大時，左邊趨於 1，而 $t/2$ 則無限增大。
- (ii)：$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.8556$，而 $12(1-\mathrm{e}^{-1/4})^2 \approx 0.5871$。
- (iii)：數值上 $J \approx 1.1981$，介乎 $64/(25\pi) \approx 0.8149$ 與 $\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533$ 之間。上界相當接近，因為 $\sqrt{\sin x}$ 在區間的大部分範圍內都頗為平坦（接近 1），而取 $f = 1$ 時，施瓦茨不等式取等號當且僅當 g 是常數。

常見錯誤

- 弄錯界的方向。若未知積分是 $\int fg$，施瓦茨不等式只能給出它的上界，所以要得到下界，未知積分必須是 $\int f^2$ 或 $\int g^2$。
- 在 (i) 中除以 $\mathrm{e}^t - 1$ 時沒有說明它是正數。
- 在 (iii) 的上界中，忘記利用 $J > 0$ 取正平方根。

STEP 之外

施瓦茨（柯西－施瓦茨，Cauchy–Schwarz）不等式指出，內積（inner product）$\langle f, g\rangle = \int fg$ 滿足 $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$，且等號成立當且僅當 f 與 g 成比例。它在每一個內積空間（inner product space）中都成立，由 $\mathbb{R}^n$ 中的向量到函數空間皆然；正是它使「兩個函數之間的夾角」這個概念有意義。這個想法是傅里葉級數（Fourier series）和最小二乘逼近（least-squares approximation）的基礎。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）闡述了內積與正交性（orthogonality），而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）則展示了如何運用這類不等式來控制積分。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。