詳細解答

STEP II 2017，第 3 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP II 2017，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q3

關鍵思路

方程 $\sin y = k$ 從來不會只有一個解：若 y_0 是一個解，則 $\pi - y_0$ 也是，而與這兩者相差 2π 的任何值亦是。因此這裏每一幅草圖，都是同一條基本曲線的幾個複本，按正弦函數的對稱性（symmetry）擺放而成。第 (i) 部分用直線展示這個規律；在 (ii) 中，微積分確定了基本部分 $y = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$ 的形狀，其餘的交由對稱性完成。第 (iii) 部分則是把 $\cos y$ 寫成正弦之後，再做一次 (ii)。

解答

第 (i) 部分

$\sin y = \sin x$ 成立，當且僅當

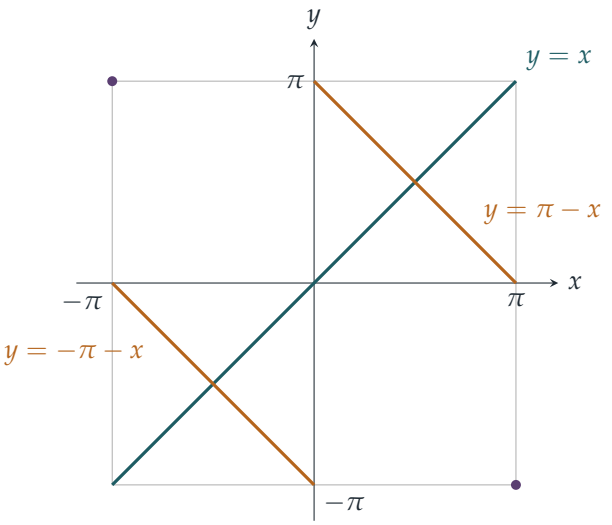
$$y = x + 2k\pi \qquad 或 \qquad y = \pi - x + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

現在看看這些直線中哪些與正方形 $-\pi \le x, y \le \pi$ 相交。

- $y = x$ 貫穿整條對角線，由 $(-\pi, -\pi)$ 至 (π, π)。
- $y = x \pm 2\pi$ 要求 $y - x = \pm 2\pi$。在正方形內，$|y - x| \le 2\pi$，且等號只在角點成立，所以這兩條直線只給出兩個孤立點 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$。
- $x + y = \pi$ 是由 $(0, \pi)$ 至 $(\pi, 0)$ 的線段，而 $x + y = -\pi$（即 $k = -1$ 的情況）是由 $(-\pi, 0)$ 至 $(0, -\pi)$ 的線段。
- $x + y = 3\pi$ 或 -3π 都不可能，因為 $|x + y| \le 2\pi$。

所以這個集合由對角線 $y = x$、$x + y = \pm\pi$ 的兩條線段，以及兩個角點 $(-\pi, \pi)$ 和

$(\pi, -\pi)$ 組成。



孤立的角點很容易被遺漏。它們確實是解，因為 $\sin(\pm\pi) = 0$。

第 (ii) 部分

對 $\sin y = \frac{1}{2}\sin x$ 進行隱函數微分（implicit differentiation），得 $y' \cos y = \frac{1}{2}\cos x$。當 $0 \le y \le \frac{1}{2}\pi$ 時，$\cos y \ge 0$，所以

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x},$$

它永遠不為零。因此

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}.$$

設 $s = \sin x$。利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{4 - s^2} = \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}$，由商法則（quotient rule）得

$$y'' = \frac{-\sin x\sqrt{4 - s^2} - \cos x \cdot \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}}{4 - s^2} = \frac{-s(4 - s^2) + s\cos^2 x}{(4 - s^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{s\left(-4 + s^2 + 1 - s^2\right)}{(4 - s^2)^{3/2}} = -\frac{3\sin x}{(4 - \sin^2 x)^{3/2}},$$

其中用了 $\cos^2 x = 1 - s^2$。這就是所求的結果。

基本部分。在這個四分之一正方形內，曲線是 $y = f(x)$，其中 $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$。它由 $(0, 0)$ 出發，終於 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$，因為 $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$，所以它從不接近上邊 $y = \frac{1}{2}\pi$。它在原點的斜率是 $\frac{1}{2}$，到 $x = \frac{1}{2}\pi$ 時降至 0。此外，當 $0 < x \le \frac{1}{2}\pi$ 時 $y'' < 0$，而在

$x = 0$ 時 $y'' = 0$，所以曲線是上凸（concave）且遞增的，並在原點有一個拐點（point of inflection）。

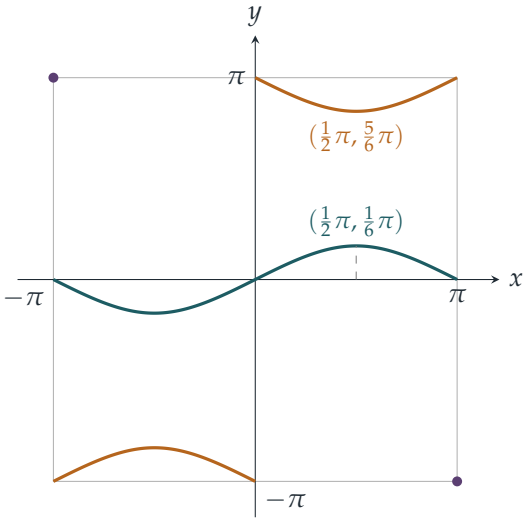
想一想 不再做任何微積分，怎樣由這一小段弧得出整個正方形內的圖像？

我們利用對稱性。由於 $\sin(\pi - x) = \sin x$，而且 f 是奇函數（odd function），$y = f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的圖像關於 $x = \frac{1}{2}\pi$ 對稱，並且關於原點有旋轉對稱（rotational symmetry）。它是一條平緩的波，經過 $(-\pi, 0)$、$(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$，最大點為 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$，最小點為 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$。它在原點的斜率是 $\frac{1}{2}$，在 $x = \pm\pi$ 的斜率是 $-\frac{1}{2}$。

與 (i) 一樣，完整的解集由 $y = f(x) + 2k\pi$ 或 $y = \pi - f(x) + 2k\pi$ 給出。在正方形內剩下：

- 對所有 $-\pi \le x \le \pi$ 的波 $y = f(x)$；
- $y = \pi - f(x)$，它只在 $f(x) \ge 0$ 之處，即 $0 \le x \le \pi$ 時，位於正方形內。這是一條由 $(0, \pi)$ 垂到 (π, π) 的拱形，最低點為 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$；
- $y = -\pi - f(x)$，它只在 $f(x) \le 0$ 之處，即 $-\pi \le x \le 0$ 時，位於正方形內。這是一條由 $(-\pi, -\pi)$ 拱起至 $(0, -\pi)$ 的拱形，最高點為 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi)$；
- 孤立的角點 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$，分別來自 $x = -\pi$ 時的 $y = \pi - f(x)$ 和 $x = \pi$ 時的 $y = -\pi - f(x)$。

k 的其他值都給出 $|y| > \pi$。拱形以斜率 $\pm\frac{1}{2}$ 與直線 $y = \pm\pi$ 相交，它們是那條波旋轉半周後再向上或向下平移所得。與 (i) 比較：對角線被壓平成波，兩條線段則彎成了拱形。



第 (iii) 部分

想一想 怎樣把 $\cos y$ 變成我們已經畫過的東西？

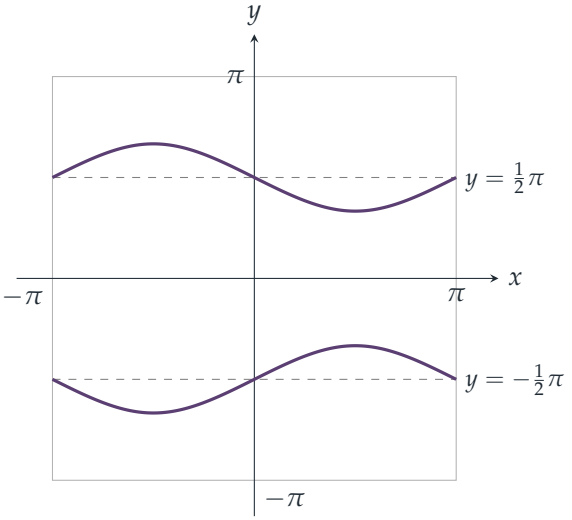
寫 $\cos y = \sin(\frac{1}{2}\pi - y)$。於是 $\cos y = \frac{1}{2}\sin x$ 表示 $u = \frac{1}{2}\pi - y$ 滿足 $\sin u = \frac{1}{2}\sin x$，所以 $u = f(x) + 2k\pi$ 或 $u = \pi - f(x) + 2k\pi$。即是

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - f(x) - 2k\pi \qquad 或 \qquad y = f(x) - \tfrac{1}{2}\pi - 2k\pi.$$

由於 $|f(x)| \le \frac{1}{6}\pi$，只有 $k = 0$ 給出在 $[-\pi, \pi]$ 內的值，而且對每一個 x 都如此。所以這個集合恰好由兩條完整的波組成：

- $y = f(x) - \frac{1}{2}\pi$：把 (ii) 的波向下平移 $\frac{1}{2}\pi$，在 $-\frac{2}{3}\pi$ 與 $-\frac{1}{3}\pi$ 之間振盪；
- $y = \frac{1}{2}\pi - f(x)$：它在 x 軸中的鏡像（這是必然的，因為 $\cos y$ 是 y 的偶函數）。它的最小點為 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$，最大點為 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$。

這次沒有孤立點。



驗算

- 取樣點：$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ 給出 $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi$，而 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ 亦成立。在 (iii) 中，$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ 給出 $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$。
- 在 $x = 0$，公式給出 $y' = \frac{1}{2}$，與小角近似（small-angle approximation）$y \approx \frac{1}{2}x$ 吻合。在 $x = \frac{1}{2}\pi$，公式給出 $y' = 0$，在最大點理應如此。

- 我們用電腦以有限差分（finite differences）在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內的隨機點驗證了 y' 和 y'' 的公式。電腦亦對許多隨機的 x 求出所有解 $y \in [-\pi, \pi]$，結果與上述各分支（branches）相符：在 (ii) 中當 $x \neq 0, \pm\pi$ 時有兩個解，在 (iii) 中則總是有兩個解。

常見錯誤

- 在 (i) 和 (ii) 中遺漏角點 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$。
- 在 (ii) 中把拱形畫滿整個 $[-\pi, \pi]$：一旦 $f(x) < 0$，$y = \pi - f(x)$ 便離開正方形。
- 取 $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$：符號已由 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ 確定。

STEP 之外

形如 $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ 的集合稱為水平集（level set）。隱函數定理（implicit function theorem）指出，凡 $\partial F/\partial y \neq 0$ 之處，它在局部都是一個光滑的函數圖像。在這裏，這條件恰好在 $\cos y = 0$ 之處失效；而由於當 $|\sin y| \leq \frac{1}{2}$ 時這永遠不會發生，(ii) 中的曲線都是關於 x 的光滑圖像。在 (i) 中，交叉點正是 $\sin y - \sin x$ 的兩個偏導數（partial derivatives）同時為零之處，而水平集亦正是在這些點上不再是一條曲線。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）建立了單變量的基礎；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）則是一本生動的輔助讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。