詳細解答

STEP II 2017，第 2 題

純數學 • 周期數列

> **STEP II 2017，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q2

關鍵思路

把映射與自身複合並化簡：遞推關係（recurrence relation）走兩步，得到的是另一個形狀完全相同的「一次式除以一次式」映射，所以走四步其實就是把「走兩步」再做兩次。每當我們問 $x_{n+k} = x_n$ 是否成立時，消去分母都會得到一條關於 x_n 的二次方程，而這條二次式可以因式分解（factorise）。其中一個因式總是 $x^2 + (b-a)x + 1$，它的根正好就是遞推關係的*不動點*（fixed points），即令數列成為常數數列的那些值。看出這一點，兩部分便都迎刃而解。

解答

記 $f(x) = \dfrac{ax-1}{x+b}$，使得 $x_{n+1} = f(x_n)$。於是

$$x_{n+2} = \frac{a\dfrac{ax_n-1}{x_n+b} - 1}{\dfrac{ax_n-1}{x_n+b} + b}.$$

分子分母同乘以 $x_n + b$（按假設不為零），得

$$x_{n+2} = \frac{a(ax_n-1) - (x_n+b)}{(ax_n-1) + b(x_n+b)} = \boxed{\frac{(a^2-1)x_n - (a+b)}{(a+b)x_n + b^2 - 1}}$$

現在值得多記下一個事實。一個值 x 是不動點（$f(x) = x$）當且僅當 $ax - 1 = x^2 + bx$，即

$$q(x) \equiv x^2 + (b-a)x + 1 = 0. \qquad (*)$$

若 x_0 是 q 的根，則 $x_1 = x_0$，如此類推：數列是常數數列，週期（period）為 1。

第 (i) 部分

假設數列的週期為 2。那麼特別地 $x_2 = x_0$。在 x_{n+2} 的公式中代入 $x = x_0$ 並消去分母，

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2-1)x - (a+b) - x[(a+b)x + b^2 - 1] \\ &= -(a+b)x^2 + (a^2-b^2)x - (a+b) \\ &= -(a+b)[x^2 + (b-a)x + 1], \end{aligned}$$

這裏用了 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$。所以 $(a+b)\,q(x_0) = 0$。

想一想 為甚麼不能以「$q(x_0) = 0$ 只對應 x_0 的一個值」作結？

因為 x_0 只是一個數，沒有任何東西阻止它是 q 的根。真正排除這種情況的是 $(*)$ 的含義：若 $q(x_0) = 0$，則 x_0 是不動點，所以 $x_1 = x_0$，並且對所有 n 都有 $x_{n+1} = x_n$。這是週期 1，而週期 2 的定義不容許這種情況（取 $m = 1$）。因此 $q(x_0) \neq 0$，從而

$$a + b = 0$$

是週期 2 的必要條件。

（反過來，若 $b = -a$，兩步公式便簡化為 $x_{n+2} = \dfrac{(a^2-1)x_n}{a^2-1} = x_n$。這裏不可能出現 $a^2 = 1$ 的情況，因為當 $a = 1$、$b = -1$ 時 $x_1 = 1$，當 $a = -1$、$b = 1$ 時 $x_1 = -1$；無論哪種情況都有 $x_1 + b = 0$，而這是被排除的。）

第 (ii) 部分

記 $A = a^2 - 1$、$B = b^2 - 1$ 及 $c = a + b$，使得 $x_{n+2} = g(x_n)$，其中 $g(x) = \dfrac{Ax - c}{cx + B}$。把 g 作用兩次，並再次將分子分母同乘以 $cx + B$，

$$x_{n+4} = \frac{A(Ax_n - c) - c(cx_n + B)}{c(Ax_n - c) + B(cx_n + B)} = \frac{(A^2 - c^2)x_n - c(A+B)}{c(A+B)x_n + B^2 - c^2}.$$

那麼 $x_{n+4} = x_n$ 成立當且僅當

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2-c^2)x_n - c(A+B) - x_n[c(A+B)x_n + B^2 - c^2] \\ &= -c(A+B)x_n^2 + (A^2 - B^2)x_n - c(A+B) \\ &= -(A+B)[c\,x_n^2 + (B-A)x_n + c]. \end{aligned}$$

由於 $B - A = b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (b-a)c$，方括號內的式子等於 $c\,q(x_n)$，所以

$$x_{n+4} = x_n \iff (a^2 + b^2 - 2)\,(a+b)\,q(x_n) = 0.$$

必要性。假設週期為 4。數列不是常數數列，所以 x_0 不是不動點，$q(x_0) \neq 0$。若 $a + b = 0$，則由第 (i) 部分的逆命題得 $x_2 = x_0$，而且實際上對所有 n 都有 $x_{n+2} = x_n$，與週

期 4 矛盾。所以 $a+b\neq 0$，於是取 $n=0$ 時的因式分解迫使

$$a^2+b^2=2.$$

充分性。假設 $a^2+b^2=2$。那麼 $A+B=0$，所以對每個 n 都有 $x_{n+4}=x_n$。我們必須驗證沒有更小的 m 能成立。

- $a+b\neq 0$：否則 $a^2=b^2=1$，並如第 (i) 部分所述，$x_1+b=0$，而這是被排除的。
- 沒有實數不動點：q 的判別式（discriminant）是 $(b-a)^2-4=(a^2+b^2)-2ab-4=-2(1+ab)$，而 $|ab|\leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)=1$，且只有當 $(a,b)=\pm(1,-1)$ 時才有 $ab=-1$，這情況我們剛剛已經排除。所以 $ab>-1$，判別式為負，對每個實數 x_n 都有 $q(x_n)\neq 0$。因此 $m=1$ 不成立。
- $m=2$：由第 (i) 部分，$x_2=x_0$ 需要 $(a+b)q(x_0)=0$，但這是錯的。所以 $m=2$ 不成立。
- $m=3$：若對所有 n 都有 $x_{n+3}=x_n$，則對所有 n 都有 $x_{n+1}=x_{(n+1)+3}=x_{n+4}=x_n$，得出週期 1，而這我們剛剛已經排除。

因此，對實數 a、b 及 x_0（分母均不為零，如題目所容許），數列的週期為 4 當且僅當

$$\boxed{a^2+b^2=2.}$$

起始值 x_0 在這個條件中不起任何作用。

驗算

取 $a=\sqrt{2}$、$b=0$ 及 $x_0=1$。數列依次為

$$1,\quad \sqrt{2}-1,\quad -1,\quad \sqrt{2}+1,\quad 1,\ \ldots$$

其週期恰好為 4。例如 $f(-1)=(-\sqrt{2}-1)/(-1)=\sqrt{2}+1$。電腦驗算以數以千計的隨機有理數 a、b、x_0 確認了兩步及四步公式完全正確。它亦對圓 $a^2+b^2=2$ 上約二千個隨機點確認了週期為 4，而對不在該圓上的隨機 (a,b)，則發現四步之後都沒有回到起點。

常見錯誤

- 由 $(a+b)q(x_0)=0$ 推出 $a+b=0$，卻沒有解釋為甚麼 $q(x_0)\neq 0$。不動點的詮釋正是箇中原因。
- 給出 $a^2+b^2=2$ 作為週期 4 的答案，卻沒有驗證週期其實不是 1 或 2。

- 在第 (ii) 部分的方括號中遺漏了因式 $a+b$，以致週期 2 的情況 $a+b=0$ 被錯誤地看成給出週期 4。

STEP 之外

形如 $x \mapsto \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ 的映射是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation）。複合兩個這樣的映射，相當於把它們對應的 2×2 矩陣相乘，在這裏該矩陣為 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$。映射的週期為 k 當且僅當矩陣的 k 次冪是單位矩陣（identity matrix）的倍數，而這由比值 $(\text{跡})^2/\det = (a+b)^2/(ab+1)$ 決定。週期 4 對應於值 2，其實是一個喬裝了的「旋轉 $\pi/4$」。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）有精彩的一章講述莫比烏斯變換，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）則涵蓋了其背後的特徵值（eigenvalue）概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。