詳細解答

STEP II 2017，第 13 題

概率與統計 • 期望值與無窮級數

> **STEP II 2017，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q13

關鍵思路

無論哪一種情況，門在第 k 次嘗試時打開，當且僅當前 $k-1$ 次嘗試都失敗而第 k 次成功，所以所求概率是若干個「失敗」因子乘以一個「成功」因子。各種情況之間的分別，只在於每次抽取時袋中有多少條鑰匙。把概率寫出來之後，期望值（expectation）就是一些求和：(i) 是一個經微分的等比級數（geometric series），(ii) 是一個等差級數（arithmetic series），而 (iii) 則是一個裂項相消（telescoping）的和，最後剩下調和級數（harmonic series）的一部分。

解答

全文中，設 X 為門被打開時的嘗試次數，並設 $q = 1 - \frac{1}{n}$。

第 (i) 部分

每次都從裝有全部 n 條鑰匙的袋中抽取；由於鑰匙會放回，每次抽取與之前的抽取互相獨立（independent）。因此每次嘗試成功的概率都是 $\frac{1}{n}$，而

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1} \cdot \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

由二項展開（binomial expansion），因 $0 < q < 1$ 而成立，

$$(1-q)^{-2} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}.$$

因此

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1-q)^{-2} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n.$$

嘗試次數的期望值是 n。

第 (ii) 部分

現在每次失敗後，袋中就少了一條錯誤的鑰匙，所以第 j 次嘗試時袋中有 $n-j+1$ 條鑰匙。要門在第 k 次嘗試時打開，需要先失敗 $k-1$ 次，然後成功一次：

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n},$$

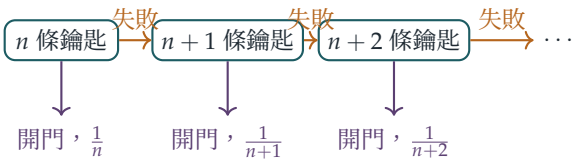
因為這個乘積會逐項相消。（這一點也可以直接看出：逐條不放回地抽出鑰匙，正確的鑰匙在 n 個位置中的位置是均勻隨機的。）所以 X 在 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上服從均勻分佈（uniform distribution），而

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

第 (iii) 部分

概率。 袋中起初有 n 條鑰匙，每次失敗後就多加一條錯誤的鑰匙，而袋中始終恰好有一條正確的鑰匙。所以第 j 次嘗試時袋中有 $n+j-1$ 條鑰匙，而

$$\mathrm{P}(\text{第}j\text{ 次嘗試失敗}\mid\text{之前的嘗試均失敗})=\frac{n+j-2}{n+j-1}.$$



把 $k-1$ 次失敗及其後一次成功的條件概率（conditional probability）相乘，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n+k-3}{n+k-2}\cdot\frac{1}{n+k-1}\\&=\frac{n-1}{n+k-2}\cdot\frac{1}{n+k-1}=\frac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)},\end{aligned}$$

因為每個分子都與前一個分母相消，只剩下第一個分子 $n-1$ 和最後一個失敗因子的分母 $n+k-2$。當 $k=1$ 時沒有失敗因子，而公式給出 $\frac{n-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}$，與預期相符。這就是所求的結果。

門一定會打開。 在計算平均值之前，值得先驗證 X 以概率 1 為有限。由於 $\dfrac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)} = (n-1)\left(\dfrac{1}{n+k-2} - \dfrac{1}{n+k-1}\right)$，這個和會裂項相消：

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+N-1}\right) \to 1 \quad \text{當} N \to \infty.$$

期望值。 我們需要求 $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$，所以把 $\dfrac{k}{(n+k-1)(n+k-2)}$ 拆成部分分式（partial fractions）。設

$$k = A(n+k-2) + B(n+k-1)$$

代入 $k = 1-n$ 得 $1-n = -A$，所以 $A = n-1$；代入 $k = 2-n$ 得 $B = 2-n$。因此

$$k\,\mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{n-1}{n+k-1} - \frac{n-2}{n+k-2}\right).$$

> **想一想** 這個式子不能乾淨地裂項相消，因為係數 $n-1$ 和 $n-2$ 並不相同。那麼剩下來的是甚麼？

設 S_N 為首 N 項之和。第一個分數的分母取遍 $m = n, \ldots, n+N-1$；第二個分數的分母則取遍 $m = n-1, \ldots, n+N-2$。在共同範圍 $m = n, \ldots, n+N-2$ 上，每個 $\frac{1}{m}$ 的係數都是 $(n-1)-(n-2) = 1$，而兩端則剩了下來：

$$S_N = (n-1)\left(\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} + \frac{n-1}{n+N-1} - \frac{n-2}{n-1}\right).$$

最後兩項是有界的（中間一項為正，最後一項是一個固定的數），而

$$\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{n+N-2} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \to \infty$$

當 $N \to \infty$ 時成立，因為調和級數發散（diverges），而我們只減去一個固定的有限值。由於 $n-1 > 0$，所以 $S_N \to \infty$。所有項 $k\,\mathrm{P}(X=k)$ 都是正數，因此定義 $\mathrm{E}(X)$ 的級數發散至無窮：嘗試次數的期望值是無窮大，儘管門最終必定會打開。

驗算

- 當 $n = 2$ 時，三個答案分別是 2、$\frac{3}{2}$ 和 ∞。第二種情況效率最高，這是理所當然的，因為它從不重試同一條鑰匙；第一種情況則介乎兩者之間。
- 在 (iii) 中取 $n = 3$，公式對 $k = 1, 2, 3$ 給出 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$；直接計算則得 $\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ 和 $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$。以電腦模擬 2×10^5 局，得到的頻率為 0.334、0.168 和 0.099。

- 同樣取 $n = 3$，當 $N = 10^4$ 時部分和 S_N 約為 15.6，而且它會像 $2\ln N$ 般不斷增長：並沒有極限。

常見錯誤

- 在 (iii) 中，把第 k 次嘗試時袋中鑰匙的數目當作 $n + k$ 而不是 $n + k - 1$：在第 k 次抽取之前，只加入了 $k - 1$ 條鑰匙。
- 因為平均值是無窮大，就斷定門可能永遠打不開。各概率之和為 1；只是其尾部像 $1/k^2$ 般衰減，太「重」了，令 $\sum k\,\mathrm{P}(X = k)$ 無法收斂。
- 把部分分式當作兩個係數相等般裂項相消，因而得出一個有限的答案。

STEP 之外

第三種情況給出一個以概率 1 為有限、但平均值為無窮大的隨機變量（random variable），原因是 $\mathrm{P}(X = k)$ 的表現像 $1/k^2$。像這樣的重尾分佈（heavy-tailed distribution），以及著名的聖彼得堡悖論（St Petersburg paradox），說明了為何大學一年級的概率課程堅持：只有當 $\sum k\,\mathrm{P}(X = k)$ 收斂時，$\mathrm{E}(X)$ 才存在。每次失敗後多加一條錯誤鑰匙的袋子，與波利亞（Pólya）罐子模型是近親；後者是描述「富者愈富」過程的標準模型。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）講述了離散隨機變量的期望值以及這些微妙之處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。