詳細解答

STEP II 2017，第 12 題

概率與統計 • 泊松過程

> **STEP II 2017，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q12

關鍵思路

兩條互相獨立（independent）的泊松（Poisson）魚流合併後，成為一條單一的泊松魚流，其速率為兩個速率之和；這正是第 (i) 部分中的卷積（convolution）所顯示的。至於有關時間的問題，要把關於第一條魚何時上釣的陳述，轉化為關於釣到多少條魚的陳述：「亞當的第一條魚在時間 t 之後才上釣」的意思恰恰就是「亞當在 $[0,t]$ 內沒有釣到任何魚」，而泊松公式可以直接給出這個概率。

解答

全文中，X 和 Y 分別是亞當和夏娃在長度為 T 的時段內釣到的魚的數目，因此 $X \sim \mathrm{Po}(\lambda T)$ 及 $Y \sim \mathrm{Po}(\mu T)$，兩者互相獨立。

第 (i) 部分

對整數 $r \geq 0$，事件 $X+Y=r$ 可分拆為互斥事件 $\{X=j,\ Y=r-j\}$，其中 $j=0,1,\ldots,r$。利用獨立性，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=r) &= \sum_{j=0}^{r} \mathrm{P}(X=j)\,\mathrm{P}(Y=r-j) = \sum_{j=0}^{r} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \cdot \frac{e^{-\mu T}(\mu T)^{r-j}}{(r-j)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (\lambda T)^j (\mu T)^{r-j} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}((\lambda+\mu)T)^r}{r!},\end{aligned}$$

這裏我們先乘以再除以 $r!$，然後運用二項式定理（binomial theorem）。這正是 $\mathrm{Po}((\lambda+\mu)T)$ 的概率，因此在時間 T 內的總漁獲服從參數為 $(\lambda+\mu)T$ 的泊松分佈。

第 (ii) 部分

對 $0 \le r \le k$，

$$\mathrm{P}(X = r \mid X+Y = k) = \frac{\mathrm{P}(X = r,\ Y = k-r)}{\mathrm{P}(X+Y=k)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^r}{r!} \cdot \dfrac{e^{-\mu T}(\mu T)^{k-r}}{(k-r)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)T}((\lambda+\mu)T)^k}{k!}},$$

其中分母用了第 (i) 部分的結果。指數項互相抵消，T 的冪也一樣（分子有 $r+(k-r)=k$ 次，分母也有 k 次），剩下

$$\mathrm{P}(X = r \mid X+Y = k) = \binom{k}{r}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-r}.$$

所以，在總數為 k 的條件下，亞當的漁獲服從 $\mathrm{B}(k,\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$。實際上，這 k 條魚中的每一條，都各自獨立地以概率 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ 屬於亞當。留意 T 已經消失了。

第 (iii) 部分

設 A 和 E 分別為亞當和夏娃釣到第一條魚的時間，從開始時起計。亞當的第一條魚在時間 t 之後才上鈎，當且僅當他在 $[0,t]$ 內甚麼也沒釣到，因此

$$\mathrm{P}(A > t) = \mathrm{P}(\mathrm{Po}(\lambda t) = 0) = e^{-\lambda t}, \qquad \text{同理} \qquad \mathrm{P}(E > t) = e^{-\mu t}.$$

因此 A 的概率密度函數（probability density function）為 $\lambda e^{-\lambda t}$，其中 $t \ge 0$（把 $1-e^{-\lambda t}$ 求導即得），而由於兩人的漁獲互相獨立，A 和 E 也互相獨立。

> **想一想** 我們該如何把 A 的密度與 E 的概率結合起來？

以 A 的值為條件：若亞當的第一條魚在時間 t 上釣，那麼他領先恰恰就是 $E > t$ 的情況，由獨立性可知其概率為 $e^{-\mu t}$。對所有 t 求和，

$$\mathrm{P}(A < E) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[\frac{-e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

（由於 E 服從連續分佈，兩人同時釣到的概率為零。）所以第一條魚屬於亞當的概率是 $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$，與第 (ii) 部分的二項分佈參數相同。

第 (iv) 部分

我們要求 $\mathrm{E}(M)$，其中 $M = \max(A,E)$ 是兩人都釣到魚的時間。記 $m = \min(A,E)$，即兩人之中任何一人釣到第一條魚的時間。對任意兩個數，max + min 等於它們的和，因此

$$M = A + E - m \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(E) - \mathrm{E}(m).$$

$\mathrm{E}(A)$ 與 $\mathrm{E}(E)$。從開始時起計，亞當的漁獲所構成的過程，與從任何一次釣到魚的時刻起計的過程屬同一類，因此他等待第一條魚的期望（expectation）時間，與題目給出的期望間隔相同，即 $\mathrm{E}(A) = \lambda^{-1}$；同樣 $\mathrm{E}(E) = \mu^{-1}$。（直接計算：利用分部積分（integration by parts），$\mathrm{E}(A) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^{-1}$。）

? **想一想** 「兩人之中任何一人釣到的第一條魚」屬於哪一類過程？

由第 (i) 部分，在任何長度為 t 的時段內，兩人的合計漁獲服從 $\mathrm{Po}((\lambda+\mu)t)$。所以合計漁獲與亞當的漁獲是完全同類的過程，只是速率由 λ 換成 $\lambda+\mu$，因此等待第一條魚的期望時間為 $\mathrm{E}(m) = (\lambda+\mu)^{-1}$。（直接計算：$\mathrm{P}(m > t) = \mathrm{P}(A > t)\,\mathrm{P}(E > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}$。）因此

$$\mathrm{E}(M) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}.$$

驗算

- 若 $\lambda = \mu$，第 (iii) 部分給出 $\frac{1}{2}$，正如對稱性（symmetry）所要求；第 (iv) 部分給出 $\frac{3}{2\lambda}$：先等 $\frac{1}{2\lambda}$ 得到第一條魚，再根據同樣的「重新開始」推理，另一人還要多等 $\frac{1}{\lambda}$。
- 若 $\mu \to \infty$（夏娃即時釣到魚），第 (iv) 部分的答案趨向 $\frac{1}{\lambda}$，即亞當獨自所需的時間。
- 第 (iv) 部分的答案至少為 $\max(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu})$，這是必然的，因為 $\frac{1}{\mu} > \frac{1}{\lambda+\mu}$。
- 取 $\lambda = 1.3$、$\mu = 0.7$，公式給出 0.65 和 1.6978；以電腦模擬 2×10^5 次釣魚之旅，得到 0.651 和 1.700。

常見錯誤

- 在第 (iv) 部分，把 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 相加，或取 $\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}\right)$：最大值的期望並非兩者之一。
- 在第 (ii) 部分，忘記除以 $\mathrm{P}(X+Y=k)$，而正是這一步把聯合概率（joint probability）變成條件概率（conditional probability）。

STEP 之外

你在這裏遇到的是*泊松過程*（Poisson process）：事件之間的等待時間服從指數分佈，並具有無記憶性（memoryless）；互相獨立的泊松過程疊加（superpose）後成為另一個泊松過程；而每個事件都獨立地以與其速率成正比的概率被標記（反方向的操作，即「稀疏化」（thinning），同樣成立）。這些事實是排隊論（queueing theory）和連續時間馬可夫鏈（continuous-time Markov chains）的基礎。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability:*

An Introduction（《概率導論》）對泊松過程和指數分佈（exponential distribution）的處理，正好可以作為這道題目的自然延續。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。