詳細解答

STEP II 2017，第 11 題

力學 • 拋體與能量

STEP II 2017，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

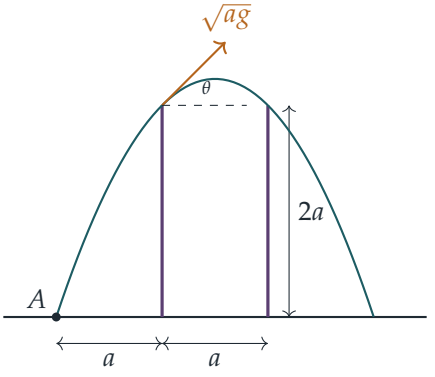
step.maths.org/questions/17-s2-q11

關鍵思路

當質點升到與第一道牆頂同高時，餘下的飛行就是一道全新的拋射體（projectile）問題：它從高度 $2a$ 出發，速率已知，而在水平距離 a 之後，高度仍須至少為 $2a$。利用能量（energy）可以在不知道拋射角的情況下求出這個速率。把軌跡（trajectory）以 $\tan\theta$ 表示，就能把「它能否越過第二道牆？」轉化為「一個關於 $\tan\theta$ 的二次方程（quadratic equation）是否有實根？」，這樣兩個部分便可一併處理。

解答

把每個質點視為只受重力作用、自由運動的質點（point mass），不計空氣阻力（air resistance）。取 x 為水平方向（朝向牆的一方），y 為鉛直向上。



第 (i) 部分

越過第一道牆時的速率。只有重力做功，所以動能（kinetic energy）與勢能（potential energy）之和保持不變。質點從地面升至高度 $2a$，設它在牆頂時的速率為 v，則

$$\tfrac{1}{2}m(5ag) = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(2a) \quad \Longrightarrow \quad v^2 = 5ag - 4ag = ag,$$

因此質點以速率 $\sqrt{ag}$ 越過第一道牆。

角度。設質點越過第一道牆時，速度與水平方向成仰角 θ；由於質點稍後（越過第二道牆時）會再次處於高度 $2a$，它此時必定仍在上升，所以 $\theta > 0$。以第一道牆頂為起點量度：經過水平距離 X 後，質點高於牆頂水平的高度為

$$Y = X\tan\theta - \frac{gX^2}{2v^2\cos^2\theta} = X\tan\theta - \frac{X^2}{2a}(1+\tan^2\theta),$$

這裏用了 $v^2 = ag$ 及 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$。恰好越過第二道牆，即在 $X = a$ 時 $Y = 0$：

$$a\tan\theta - \tfrac{a}{2}(1+\tan^2\theta) = 0 \iff \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0 \iff (\tan\theta - 1)^2 = 0.$$

所以 $\tan\theta = 1$，$\theta = 45°$，正如所求。（另一種說法：從高度 $2a$ 回到高度 $2a$，相當於在水平地面上的射程（range）為 $v^2\sin 2\theta/g = a\sin 2\theta$，而它只在 $\sin 2\theta = 1$ 時等於 a。）

A 的距離。速度的水平分量始終不變，在第一道牆上方時為 $\sqrt{ag}\cos 45° = \sqrt{ag/2}$；該處的鉛直分量同樣是 $\sqrt{ag/2}$，方向向上。在 A 點，鉛直分量 u 滿足 $u^2 = \frac{1}{2}ag + 2g(2a) = \frac{9}{2}ag$，所以 $u = 3\sqrt{ag/2}$。（驗算一下：$\frac{1}{2}ag + \frac{9}{2}ag = 5ag$，與發射速率吻合。）從 A 到第一道牆所需的時間為

$$t = \frac{u - \sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\sqrt{ag/2}}{g},$$

在這段時間內走過的水平距離為

$$\sqrt{\tfrac{ag}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}ag}{g} = a.$$

因此 A 與第一道牆腳的距離為 a。

第 (ii) 部分

現在質點在高度 $2a+h$ 處越過第一道牆。由能量守恆，它在該處的速率 w 滿足

$$w^2 = 5ag - 2g(2a+h) = g(a-2h).$$

質點朝牆的方向運動，所以水平速度不為零，故 $w^2 > 0$；因此 $h < \frac{1}{2}a$。

設它在該處的運動方向與水平方向成角 ϕ，並記 $T = \tan\phi$。以質點在第一道牆上方的位置為起點量度，經過水平距離 X 後，它高於該點的高度為

$$Y = XT - \frac{gX^2}{2w^2}(1+T^2) = XT - kX^2(1+T^2)/a^2, \qquad \text{其中} k = \frac{ga^2}{2w^2} = \frac{a^2}{2(a-2h)}.$$

在第二道牆處 $X = a$，所以 $Y = aT - k(1+T^2)$。要越過這道牆，質點的高度須至少為 $2a$，即 $Y \geq -h$：

$$aT - k(1+T^2) + h \geq 0 \iff kT^2 - aT + (k-h) \leq 0.$$

想一想 我們不知道 ϕ 的值。怎樣才能證明沒有任何方向可行？

由於 $k > 0$，二次式 $kT^2 - aT + (k-h)$ 的圖像開口向上。它只有在判別式（discriminant）非負時，才會對某個實數 T 取得 ≤ 0 的值。這個判別式為

$$\Delta = a^2 - 4k(k-h) = a^2 - \frac{a^4}{(a-2h)^2} + \frac{2a^2h}{a-2h}.$$

乘以正數 $(a-2h)^2/a^2$，得

$$\frac{(a-2h)^2}{a^2}\Delta = (a-2h)^2 - a^2 + 2h(a-2h) = -2ah.$$

由於 $a > 0$ 且 $h > 0$，此式為負，所以 $\Delta < 0$。於是對所有實數 T 都有 $kT^2 - aT + (k-h) > 0$；換言之，無論質點越過第一道牆時的方向如何，它到達第二道牆時的高度都低於 $2a$。它無法越過第二道牆。

留意 $h = 0$ 時 $\Delta = 0$，並得到重根（double root）$T = a/(2k) = 1$：這正是第 (i) 部分的 45°。

驗算

- 在第 (i) 部分，A 點的速度分量為 $\sqrt{ag/2}$ 和 $3\sqrt{ag/2}$，兩者平方之和為 $5ag$。取 $a = 1.7\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，從 A 點起逐步向前推算運動，得出質點在兩道牆處的高度都是 $2.000a$。
- 軌跡關於最高點對稱；在第 (i) 部分，最高點位於兩牆正中，與 A 的水平距離為 $1.5a$。所以質點落在距 A 為 $3a$ 之處，即第二道牆之後距離 a 的地方：整幅圖是對稱的。
- 在第 (ii) 部分，用電腦以速率 $\sqrt{5ag}$ 檢驗了數以千計隨機的發射角和發射點，沒有一個既能在第一道牆上方經過，又能越過第二道牆。

常見錯誤

- 忘記第 (i) 部分的 θ 必須是越過第一道牆時的角度，而不是在 A 點的拋射角（後者滿足 $\tan\alpha = 3$）。

- 在第 (ii) 部分只檢驗某一個特定角度（例如 45°）。題目的斷言涉及所有可能的方向，所以才需要用判別式。

STEP 之外

第 (ii) 部分說明：從第一道牆上方的一點出發，具有這個能量的質點只能恰好到達第二道牆頂；換言之，該牆頂位於可到達範圍的邊界上。從某一給定點以給定速率出發可到達的所有點，都位於一條稱為包絡線（envelope）或安全拋物線（safety parabola）的拋物線之內，而拋物線上的點恰好只由一條軌跡到達，這就是這裏所見的重根。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以大學一年級程度講解拋射體及能量方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。