詳細解答

STEP II 2017，第 10 題

力學 • 克服阻力所作的功

STEP II 2017，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s2-q10

關鍵思路

牛頓第二定律（Newton's second law）給出每一點的驅動力（driving force），而引擎所做的功（work）就是這個力對距離的積分（integral）。在等加速度的情況下，$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$ 可以把對 x 的積分轉化為對 v 的積分。唯一微妙之處在於引擎只能推、不能拉：當所需的力變成負數時，便由煞車負責，引擎毫無貢獻，所以我們只在驅動力為正的範圍內積分。

解答

把汽車視為沿 x 軸運動的質點（particle），引擎提供的驅動力為 F。汽車向前行駛時，阻力（resistance）$Av^2 + R$ 向後作用。

前半段。 由牛頓第二定律得 $F - (Av^2 + R) = ma$，所以

$$F = ma + R + Av^2,$$

它在整段過程中都是正數。力 F 使其作用點移動 $\mathrm{d}x$ 時所做的功為 $F\,\mathrm{d}x$，因此引擎在前半段所做的功為

$$\int_0^d (ma + R + Av^2)\,\mathrm{d}x,$$

正如所求。至於變量代換（change of variable），加速度為 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$，所以 $\mathrm{d}x = \frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$。由於 $v^2 = 2ax$（由靜止開始以等加速度運動），v 由 $x = 0$ 時的 0 變到 $x = d$ 時的 $\sqrt{2ad} = w$。因此所做的功為

$$\int_0^w \frac{(ma + R + Av^2)\,v}{a}\,\mathrm{d}v,$$

正如所求。計算這個積分，並利用 $w^2 = 2ad$：

$$W_1 = \frac{1}{a}\left[\frac{(ma+R)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = \frac{(ma+R)w^2}{2a} + \frac{Aw^4}{4a} = (ma+R)d + Aad^2.$$

後半段。 此時加速度為 $-a$，所以 $F - (Av^2 + R) = -ma$，得

$$F = Av^2 + R - ma.$$

汽車由 w 減速至 0，其中 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -a$，所以 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$。在任何一段 $F > 0$、而速率由 v_1 降至 v_2（其中 $v_1 > v_2$）的路程上，引擎所做的功為

$$\int_{v_1}^{v_2} F\left(-\frac{v}{a}\right)\mathrm{d}v = \int_{v_2}^{v_1} \frac{(Av^2 + R - ma)\,v}{a}\,\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

若 $R > ma$，則對所有 v 皆有 $F = Av^2 + (R - ma) > 0$，所以引擎在整個後半段都在做功。由 $(*)$，取 $v_1 = w$、$v_2 = 0$：

$$W_2 = \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = (R-ma)d + Aad^2.$$

兩者相加，$ma\,d$ 項互相抵消，總功為

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd,$$

正如所求。

第 (ii) 部分

現在 $R < ma$，所以 $F = Av^2 - (ma - R)$ 恰好在以下情況等於零：

$$v = u, \qquad \text{其中} u^2 = \frac{ma - R}{A} > 0.$$

若 $u < w$，即 $\frac{ma-R}{A} < 2ad$，這個速率便真的會在後半段出現，而這正正就是條件 $R > ma - 2Aad$。因此，當汽車由 w 減速至 0 時，F 在 $v > u$ 時為正，在速率為 u 時降至零，而在 $v < u$ 時為負（煞車）。這就證明了第一個結論。

> ? **想一想** 為甚麼不能直接沿用 (i) 的答案？

(i) 中的積分把整個後半段的 $F\,\mathrm{d}x$ 加起來。這裏 F 在 $v < u$ 時為負，那一段會從總和中減去。但引擎在那裏並不是做負功，而是甚麼也沒做，由煞車接手。所以我們在 $v = u$

處停止積分。由 $(*)$，取 $v_1 = w$、$v_2 = u$：

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_u^w \\ &= (R-ma)d + Aad^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{(R-ma)u^2}{2} + \frac{Au^4}{4}\right). \end{aligned}$$

代入 $Au^2 = ma - R$，括號內的式子為

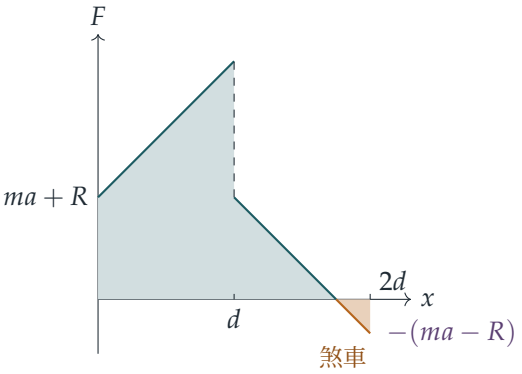
$$-\frac{(ma-R)^2}{2A} + \frac{(ma-R)^2}{4A} = -\frac{(ma-R)^2}{4A},$$

所以 $W_2 = (R-ma)d + Aad^2 + \frac{(ma-R)^2}{4Aa}$。前半段不變（那裏 $F > 0$ 恆成立），所以總功為

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd + \frac{(ma-R)^2}{4Aa},$$

正如所求。

圖解。 由於前半段 $v^2 = 2ax$，後半段 $v^2 = 2a(2d-x)$，F 在每一半都是 x 的線性函數（linear function），而引擎所做的功就是圖像正值部分之下的面積。在情況 (ii) 中，圖像在接近終點時跌到軸下方。缺去的三角形高為 $ma - R$；由於 F 每單位距離下降 $2Aa$，其底為 $\frac{ma-R}{2Aa}$。它的面積 $\frac{(ma-R)^2}{4Aa}$ 恰好就是那個額外的項。



驗算

- 在邊界 $R = ma$ 時，額外的項消失，所以 (i) 和 (ii) 的答案一致，這是理所當然的，因為此時 F 只在最後一刻才降至零。
- 在另一邊界 $R = ma - 2Aad$ 時，我們有 $u = w$，引擎在後半段完全不做功，總功應為 $W_1 = (ma+R)d + Aad^2$。把 $ma - R = 2Aad$ 代入 (ii) 的答案，得 $2Aad^2 + 2Rd + Aad^2 = 2Rd + 3Aad^2$，而 $(ma+R)d + Aad^2 = 2Rd + 2Aad^2 + Aad^2$ 亦然，所以兩者一致。

- 數值上，取 $m = a = 1$、$A = \frac{1}{2}$、$d = 2$、$R = \frac{1}{2}$（即上圖所畫的情況），(ii) 的公式給出 $4 + 2 + \frac{1}{8} = 6.125$，而直接對整段行程中 F 的正值部分作數值積分，亦得出相同的數值。
- 單位：Aad^2、Rd 和 $(ma - R)^2/(Aa)$ 都是力乘以距離，所以全都是能量。

常見錯誤

- 忘記後半段有 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$，這會使積分上下限對調；這裏的正負號錯誤會令後半段的功變成負數。
- 在 (ii) 中把 F 的負值部分也積分進去，結果只會重複得出 (i) 的答案。
- 沒有檢查速率 u 是否真的在汽車停下之前出現：這正是 R 的下界所保證的。

STEP 之外

力所做的功是一個線積分（line integral）$\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$，而這裏所用的變量代換就是功能定理（work–energy theorem）的一維版本。像 Av^2 這類阻力並不是保守力（conservative force），所以所做的功取決於行程是怎樣駕駛的，而不只取決於起點和終點。引擎這種「單向」的特性，讓我們初步領略到最優控制（optimal control）問題中出現的約束，例如尋找行駛指定距離最省燃料的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對功、能量及與速度有關的力有細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。