詳細解答

STEP II 2017，第 1 題

純數學 • 歸約公式

> **STEP II 2017，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q1

關鍵思路

被積函數（integrand）中難處理的部分是 $\arctan x$，但它的導數（derivative）是一個有理函數（rational function），所以用分部積分法（integration by parts），取 $u = \arctan x$，就能把它換成 $\frac{1}{1+x^2}$。接着，(ii) 的竅門是把兩個積分配對，使分子合併成 $x^{n+1}(1+x^2)$，從而消去麻煩的分母。這樣便得到一條令 n 每次增加 2 的遞推公式（reduction formula）；用兩次就令 n 增加 4，而這正是 (iii) 的歸納法（induction）所需要的。

解答

第 (i) 部分

用分部積分法，取 $u = \arctan x$ 及 $\mathrm{d}v = x^n\,\mathrm{d}x$，於是 $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$（由於 $n \geq 0$，這沒有問題）：

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

這裏用了 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，以及邊界項（boundary term）在 $x = 0$ 處為零這一事實。兩邊乘以 $n+1$，便得到所需結果：

$$(n+1)I_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

當 $n = 0$ 時，餘下的積分是 $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$，所以

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

第 (ii) 部分

把 (i) 中的 n 換成 $n+2$，再與原本的 (i) 相加：

$$\begin{aligned}(n+3)I_{n+2}+(n+1)I_n &= \frac{\pi}{2}-\int_0^1 \frac{x^{n+3}+x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}-\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

因為 $x^{n+3}+x^{n+1}=x^{n+1}(1+x^2)$。

> **想一想** 這條公式把 I_4 與 I_2 聯繫起來，又把 I_2 與 I_0 聯繫起來。我們需要哪些 n 值？

我們需要 $n=0$ 及 $n=2$：

$$\begin{aligned}n=0:&\quad 3I_2+I_0=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2},\\ n=2:&\quad 5I_4+3I_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

以第二式減去第一式，消去 I_2：

$$5I_4=I_0+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2,\qquad \text{所以}\qquad I_4=\frac{\pi+1-2\ln 2}{20}.$$

第 (iii) 部分

為簡便起見，記 $S_n=\sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^r}{r}$。

求 A。當 $n=1$ 時，$S_1=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，所以命題變成 $5I_4=A+\frac{1}{4}$。由 (ii) 得 $5I_4=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$，因此必須取

$$A=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\ (=I_0),$$

而取這個值時，命題對 $n=1$ 成立。

歸納步驟。假設對某個 $k\geq 1$，有 $(4k+1)I_{4k}=A-\frac{1}{2}S_k$。我們要推到 I_{4k+4}，即用 (ii) 的公式走兩步。分別取 $n=4k+2$ 及 $n=4k$，得

$$\begin{aligned}(4k+5)I_{4k+4}+(4k+3)I_{4k+2}&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4k+4},\\ (4k+3)I_{4k+2}+(4k+1)I_{4k}&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4k+2}.\end{aligned}$$

> **想一想** 怎樣才能消去多餘的 I_{4k+2}？

它在兩條方程中的係數相同，所以以第一式減去第二式便可把它消去：

$$(4k+5)I_{4k+4} = (4k+1)I_{4k} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

另一方面，S_{k+1} 比 S_k 多出兩項，即 $r = 2k+1$（奇數，所以是負的）和 $r = 2k+2$（偶數，所以是正的）：

$$-\frac{1}{2}S_{k+1} = -\frac{1}{2}S_k - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\Big) = -\frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

利用歸納假設（inductive hypothesis），

$$(4k+5)I_{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_{k+1},$$

這正是 $n = k+1$ 時的命題。由於命題對 $n = 1$ 成立，由歸納法可知它對所有 $n \geq 1$ 均成立，其中 $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$。

驗算

- 數值上，$I_0 \approx 0.438825$，$I_4 \approx 0.137765$；對原來的積分使用辛普森法則（Simpson's rule），結果在小數點後十位都吻合。
- A 等於 I_0，所以 (iii) 的公式對 $n = 0$ 也成立（此時和式是空和），這是個好兆頭。
- 當 $n \to \infty$ 時，(i) 中的積分趨向 0（被積函數不超過 x^{n+1}），所以 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$。同時 $S_n \to -\ln 2$，所以右方趨向 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}$。兩邊在極限下吻合。

常見錯誤

- 寫了 $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，卻忘了把第二個積分也除以 $n+1$。
- 弄錯交錯和中兩個新項的正負號：$r = 2k+1$ 是奇數，所以 $(-1)^r = -1$。
- 未先由基本情況（base case）確定 A，就去證明歸納步驟。

STEP 之外

最後一項驗算用到了交錯調和級數（alternating harmonic series）$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$，而這道題實際上就證明了它：(iii) 的恆等式，加上 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$ 這一事實，迫使部分和（partial sums）收斂（converge）到 $\ln 2$。利用像 $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 這類趨向零的積分來控制級數的誤差，是一種標準方法，你在第一個數學分析（analysis）課程中便會遇到。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解數學分析》）淺白易讀，是了解如何嚴格處理這類極限的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。