詳細解答

STEP I 2017，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP I 2017，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

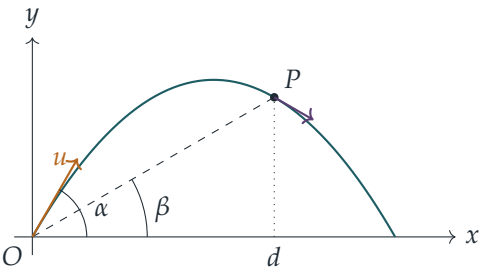
step.maths.org/questions/17-s1-q9

關鍵思路

先寫出軌跡方程（trajectory equation），並令它通過 P。這樣便得到只以投射角為變數的 u^2 表達式。最方便處理的變數是 $T = \tan\alpha$，因為 $\sec^2\alpha = 1 + T^2$ 能把一切化成 T 的有理函數（rational function）。求這個函數的最小值只是普通的微積分，而駐點（stationary point）方程原來是一條經過偽裝的倍角公式（double-angle formula）。

解答

把質點視為只受重力作用而自由運動（不計空氣阻力），以 O 為原點，x 軸水平指向 P，y 軸鉛直向上。設 $T = \tan\alpha$ 及 $k = \tan\beta > 0$。



第 (i) 部分

水平速度為 $u\cos\alpha$，因此質點在時間 $t = x/(u\cos\alpha)$ 到達水平距離 x，此時其高度為

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = xT - \frac{gx^2(1+T^2)}{2u^2}.$$

通過 $P = (d, dk)$ 即表示

$$dk = dT - \frac{gd^2(1+T^2)}{2u^2} \quad \Longrightarrow \quad u^2 = \frac{gd}{2} \cdot \frac{1+T^2}{T-k}.$$

右方必須為正，所以只有 $T > k$，即 $\alpha > \beta$ 的角度才可行。這很合理：我們必須瞄準 P 的上方。因此我們要求以下函數的最小值：

$$f(T) = \frac{1+T^2}{T-k} \qquad (T > k).$$

由商法則（quotient rule），

$$f'(T) = \frac{2T(T-k) - (1+T^2)}{(T-k)^2} = \frac{T^2 - 2kT - 1}{(T-k)^2}.$$

分子在 $T = k \pm \sqrt{k^2+1}$ 時為零，其中只有取 $+$ 號的根大於 k。由於當 $T \to k^+$ 及 $T \to \infty$ 時都有 $f(T) \to \infty$，而兩者之間只有一個駐點，所以該點給出最小值。因此最佳的 α 滿足

$$T^2 - 2kT - 1 = 0. \qquad (*)$$

想一想 不代入根式的話，怎樣在最小值處化簡 $f(T)$？

利用 $(*)$ 改寫各式。由它得 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$，故

$$T - k = \frac{2T^2 - T^2 + 1}{2T} = \frac{1+T^2}{2T}, \qquad \text{因此} \qquad f(T) = \frac{1+T^2}{(1+T^2)/(2T)} = 2T.$$

所以

$$u^2 = \frac{gd}{2} \cdot 2T = gd\tan\alpha,$$

正如所求。

至於角度，把 $(*)$ 寫成 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ 的形式，即為

$$\tan\beta = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\cot 2\alpha = \tan(2\alpha - 90^\circ),$$

這裏用了 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 及 $-\cot\theta = \tan(\theta - 90^\circ)$。（若 $\alpha = 45^\circ$，則 $(*)$ 給出 $k = 0$，但由於 $\beta > 0$，這情況已被排除，所以 $\cot 2\alpha$ 有定義。）由於 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$，角 $2\alpha - 90^\circ$ 位於 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 內，β 亦然，而 tan 在該區間上是一一對應（one-to-one）的。所以 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$，即

$$2\alpha = \beta + 90^\circ.$$

換言之，最佳投射方向平分直線 OP 與鉛直向上方向之間的夾角。

第 (ii) 部分

在 P 點，水平速度仍為 $u\cos\alpha$。所需時間為 $d/(u\cos\alpha)$，因此鉛直速度為

$$v_y = u\sin\alpha - \frac{gd}{u\cos\alpha}.$$

若質點在 P 點的運動方向與水平成仰角 θ，則

$$\tan\theta = \frac{v_y}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gd}{u^2\cos^2\alpha} = T - \frac{gd(1+T^2)}{gdT} = T - \frac{1+T^2}{T} = -\frac{1}{T} = -\cot\alpha,$$

這裏用了第 (i) 部分的 $u^2 = gdT$。所以 $\tan\theta = \tan(\alpha - 90^\circ)$，又由於 θ 介乎 -90° 與 90° 之間，故 $\theta = \alpha - 90^\circ$。

質點通過 P 時正在向下運動，方向與水平成俯角 $90^\circ - \alpha$。它在 P 點的方向與投射方向互相垂直。

驗算

- 取 $\beta = 30^\circ$。則 $\alpha = 60^\circ$ 及 $u^2 = \sqrt{3}\,gd$。直接計算，$f(T)$ 在 $T = \sqrt{3}$ 的值為 $4/(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}$，與 $2T$ 吻合。最終方向為水平以下 30°，與圖中一致。
- 令 $\beta \to 0$，得 $\alpha \to 45^\circ$ 及 $u^2 \to gd$。這正是熟悉的事實：在水平地面上，以 45° 投射可得最大射程 u^2/g。此時質點以水平以下 45° 著地，同樣與發射方向垂直。
- 對 200 組隨機選取的 d 和 β，在 α 上作數值搜索，每次所得的最小化角度都是 $\frac{1}{2}(\beta + 90^\circ)$，最小值都是 $gd\tan\alpha$。

常見錯誤

- 忽略條件 $T > k$，保留了根 $k - \sqrt{k^2+1}$。該根是負數，意味着向下投射。
- 由正切值相等推出 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$，卻沒有說明為何兩個角都位於 tan 為一一對應的區間內。
- 在 (ii) 中給出角度 $90^\circ - \alpha$，卻沒有說明質點正在下降。

STEP 之外

對於固定的速率 u，能到達的點都位於一條拋物線之內，這條拋物線就是該族軌跡的包絡線（envelope），又稱「安全拋物線」（parabola of safety）。到達 P 的最小速率軌跡，正是使 P 落在該包絡線上的那一條，而 (ii) 中的垂直關係是這條曲線的幾何性質之一。

曲線族的包絡線以及帶約束的最優化（constrained optimisation），都會在大學一年級課程中進一步發展。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是一本好書，可以看到如何以這種嚴謹態度處理拋射體問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。