詳細解答

STEP I 2017，第 8 題

純數學 • 遞推關係與數學歸納法

> **STEP I 2017，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q8

關鍵思路

表達式 $a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2$ 在遞推關係（recurrence）的每一步下都保持不變，因此它永遠等於初始值。把它除以 b_n^2，便得到一條關於比值 c_n 的精確方程，其中帶有一個很小的誤差項 $1/b_n^2$。對這條方程配方（completing the square）幾乎完成了所有工作：它給出極限、比值位於 $\sqrt{2}-1$ 的哪一側，以及 $\sqrt{2}$ 的有理數上下界。

解答

歸納法

當 $n = 1$ 時，$a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 = 1 + 4 - 4 = 1$，所以 $(*)$ 成立。

假設 $(*)$ 對某個 $n \geq 1$ 成立。記 $a = a_n$，$b = b_n$，

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2, \\ 2a_{n+1}b_{n+1} &= 2(a+2b)(2a+5b) = 4a^2 + 18ab + 20b^2, \\ b_{n+1}^2 &= 4a^2 + 20ab + 25b^2. \end{aligned}$$

把前兩式相加再減去第三式，得

$$a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 = a^2 + 2ab - b^2 = 1.$$

因此 $(*)$ 對 $n+1$ 成立，由歸納法（induction）可知它對所有 $n \geq 1$ 成立。

第 (i) 部分

首先，每個 a_n 和 b_n 都是正數：這在 $n = 1$ 時成立，而遞推關係以正係數由 a_n 和 b_n 構成 a_{n+1} 和 b_{n+1}。因此

$$b_{n+1} = 2a_n + 5b_n > 5b_n,$$

因為 $a_n > 0$。由 $b_1 = 2 = 2 \times 5^0$ 開始，每一步至少乘以 5，便得到對所有 $n \geq 1$ 有 $b_n \geq 2 \times 5^{n-1}$（一行歸納即可）。

現在把 $(*)$ 除以非零的 b_n^2：

$$c_n^2 + 2c_n - 1 = \frac{1}{b_n^2}, \qquad \text{即} \qquad (c_n+1)^2 = 2 + \frac{1}{b_n^2}. \tag{†}$$

想一想 應該取哪一個平方根？

由於 $c_n > 0$，數 $c_n + 1$ 是正數，所以我們取正平方根：

$$c_n + 1 = \sqrt{2 + \frac{1}{b_n^2}}.$$

當 $n \to \infty$ 時，$0 < 1/b_n^2 \leq \frac{1}{4}\,25^{-(n-1)} \to 0$，所以 $c_n + 1 \to \sqrt{2}$（平方根函數是連續（continuous）的）。因此 $c_n \to \sqrt{2} - 1$，得證。

第 (ii) 部分

由 (†)，$(c_n+1)^2 = 2 + 1/b_n^2 > 2$。由於 $c_n + 1 > 0$ 且 $\sqrt{2} > 0$，這給出 $c_n + 1 > \sqrt{2}$，即 $c_n > \sqrt{2} - 1$。

至於另一個界，以 2 分別除以 $c_n + 1 > \sqrt{2}$ 的兩邊；兩邊都是正數，所以不等號反轉：

$$\frac{2}{c_n+1} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

合起來，

$$\frac{2}{c_n+1} < \sqrt{2} < c_n + 1.$$

想一想 哪一個 n 值會給出 99/70？

我們需要 $c_n + 1 = (a_n + b_n)/b_n$ 等於 99/70，所以要找 $b_n = 70$。逐步計算遞推關係：

$$(a_1, b_1) = (1, 2), \quad (a_2, b_2) = (5, 12), \quad (a_3, b_3) = (29, 70).$$

所以 $c_3 = \frac{29}{70}$，$c_3 + 1 = \frac{99}{70}$，而

$$\frac{2}{c_3+1} = \frac{140}{99}.$$

把 $n = 3$ 代入這個雙向不等式，得

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}.$$

驗算

- $(a_3, b_3) = (29, 70)$ 滿足 $(*)$：$841 + 4060 - 4900 = 1$。
- $\frac{140}{99} \approx 1.414141$，$\frac{99}{70} \approx 1.414286$，而 $\sqrt{2} \approx 1.414214$ 位於兩者之間。這個區間的寬度是 $\frac{1}{6930}$。
- 下一項 $(a_4, b_4) = (169, 408)$ 給出 $c_4 \approx 0.4142157$，與 $\sqrt{2} - 1$ 的差已在 2.2×10^{-6} 以內，這與誤差大約按 $1/b_n^2$ 下降的情況吻合。
- 平方驗證：$140^2 = 19600 < 2 \times 99^2 = 19602$，而 $99^2 = 9801 > 2 \times 70^2 = 9800$。

常見錯誤

- 展開 $n+1$ 時的 $(*)$ 而沒有仔細合併同類項：ab 和 b^2 的係數只是剛好抵消（$4 + 18 - 20 = 2$ 及 $4 + 20 - 25 = -1$）。
- 聲稱 $b_{n+1} \geq 5b_n$，卻沒有指出 $a_n > 0$。
- 忘記說明為何取正平方根，或在取倒數時反轉不等號，卻沒有說明兩邊都是正數。

STEP 之外

這個遞推關係就是乘以矩陣（matrix）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，其行列式（determinant）為 1，並保持二次型（quadratic form）$x^2 + 2xy - y^2$ 不變；尋找這類不變二次型正是佩爾方程（Pell's equation）理論的核心。數 $c_n + 1$，即 $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \ldots$，是 $\sqrt{2}$ 的連分數漸近分數（continued-fraction convergent）中每隔一個所取的項；漸近分數是在其分母大小範圍內最佳的有理逼近。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對連分數和佩爾方程有精彩的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。