詳細解答

STEP I 2017，第 7 題

純數學 • 拿破崙定理

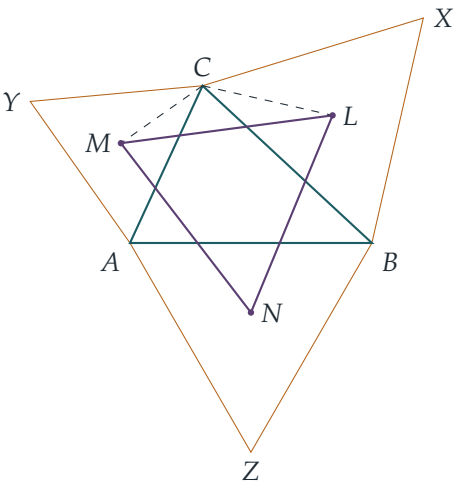
STEP I 2017，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s1-q7

關鍵思路

一切都發生在 ABC 的頂點上。等邊三角形（equilateral triangle）的中心（centre）位於其每個角的角平分線（angle bisector）上，所以由 C 到 L 及由 C 到 M 的直線，各自與 ABC 的一條邊成 30°。由此可以用 C 表示角 LCM。再在三角形 LCM 中應用餘弦公式（cosine rule），便得到 $|LM|$。結果原來是關於 a、b、c 對稱（symmetric）的，而正是這種對稱性令 LMN 成為等邊三角形。



解答

第 (i) 部分

在邊長為 b 的等邊三角形 CYA 中，中心 M 位於全部三條中線（median）上，而這些中線同時也是高（altitude）和角平分線。由 C 出發的中線長度為 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$，而中心位於由頂點起沿中線三分之二的位置。所以

$$|CM| = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, b = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

同理，三角形 BXC 的邊長為 a，所以

$$|CL| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

第 (ii) 部分

由於 CM 平分 60° 的角 YCA，直線 CM 與 CA 成 30°，且位於遠離 B 的一側。同樣地，CL 與 CB 成 30°，且位於遠離 A 的一側。繞 C 由 L 轉到 M，先經過 30°，再經過三角形的角 C，然後再經過 30°。所以

$$\angle LCM = C + 60^\circ.$$

? **想一想** 如果 $C > 120^\circ$，以致 $C + 60^\circ$ 大於 180°，那又怎樣？

這時三角形 LCM 在 C 的角是另一邊的角，即 $360^\circ - (C + 60^\circ)$。但 $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$，所以下面的餘弦公式在所有情況下都給出相同結果。

在三角形 LCM 中應用餘弦公式，並代入第 (i) 部分的長度：

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(C + 60^\circ) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\tfrac{1}{2}\cos C - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{ab\cos C}{3} + \frac{\sqrt{3}\,ab\sin C}{3}. \end{aligned}$$

現在我們運用關於三角形 ABC 的兩個事實。餘弦公式給出 $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$，而面積為 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$，所以 $ab\sin C = 2\Delta$。兩邊乘以 6，

$$\begin{aligned} 6|LM|^2 &= 2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C + 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ &= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) + 4\sqrt{3}\,\Delta \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta, \end{aligned}$$

得證。

若把 a、b、c 置換（permute），右方保持不變，而 Δ 也與三角形頂點的標記方式無關。在頂點 A（求 $|MN|$）及頂點 B（求 $|NL|$）重複同樣的論證，會得到相同的式子。所以

$$|LM| = |MN| = |NL|,$$

因此 LMN 是等邊三角形。

面積相等。邊長為 s 的等邊三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$。設 $S = a^2 + b^2 + c^2$。那麼

$$[LMN] = \frac{\sqrt{3}}{4}|LM|^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}(S + 4\sqrt{3}\,\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{24}S + \frac{\Delta}{2}.$$

因此

$$[LMN] = \Delta \iff \frac{\sqrt{3}}{24}S = \frac{\Delta}{2} \iff S = \frac{12\Delta}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\Delta.$$

每一步都可逆，所以這正是所要求的「當且僅當」。

第 (iii) 部分

利用 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 及 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$，把所有量都用 a、b 和 C 表示。下面每一行都與上一行等價：

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \\ \iff \quad & 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos C = 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = ab(\cos C + \sqrt{3}\sin C) \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ), \end{aligned}$$

因為 $\cos C + \sqrt{3}\sin C = 2(\cos C\cos 60^\circ + \sin C\sin 60^\circ) = 2\cos(C - 60^\circ)$。兩邊減去 $2ab$，

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ) - 2ab \iff (a-b)^2 = -2ab(1 - \cos(C - 60^\circ)).$$

所以兩個條件等價。

> **想一想** 一個平方怎麼可能等於一個前面帶負號的量？

只有兩邊都是零時才可以。左方 $(a-b)^2$ 至少是 0。右方則有 $ab > 0$ 及 $1 - \cos(C - 60^\circ) \geq 0$，所以右方至多是 0。因此等式成立若且僅若

$$a = b \quad \text{及} \quad \cos(C - 60^\circ) = 1.$$

由於 $0^\circ < C < 180^\circ$，我們有 $-60^\circ < C - 60^\circ < 120^\circ$，而在這範圍內餘弦等於 1 的角只有 0°。所以 $C = 60^\circ$。一個 $a = b$ 而頂角為 60° 的三角形，其餘兩角相等，且總和為 120°，所以三個角都是 60°，三角形是等邊三角形。反之，等邊三角形滿足 $a = b$ 及 $C = 60^\circ$，所以它符合該條件。

結合第 (ii) 部分：$[LMN] = [ABC] \iff a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \iff ABC$ 是等邊三角形。

驗算

- 邊長為 1 的等邊三角形 ABC：此時 $\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}$，而 $6|LM|^2 = 3+3 = 6$，所以 $|LM| = 1$，兩個面積相等，與第 (iii) 部分的預測一致。
- 邊長為 3–4–5 的直角三角形：$S = 50$ 及 $\Delta = 6$，所以 $|LM|^2 = (50+24\sqrt{3})/6 \approx 15.26$。於是 $[LMN] \approx 6.61$，大於 $[ABC] = 6$。用電腦以坐標計算點 L、M、N，得到相同的數值，並在數以千計的隨機三角形（包括鈍角三角形）上驗證了 $6|LM|^2$ 的公式。
- 第 (iii) 部分亦顯示對所有三角形都有 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$，所以 $[LMN] \geq [ABC]$ 恆成立。

常見錯誤

- 把 $|CM|$ 當作整條中線 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$，或其三分之一，而不是三分之二。
- 用了 $\angle LCM = C + 30°$ 或 C，忘記了兩側各有一個 $30°$。
- 在第 (iii) 部分只得出「$a = b$」便停下來。你還需要 $C = 60°$，並且要利用 C 的範圍來排除其他餘弦為 1 的角。

STEP 之外

這就是拿破崙定理（Napoleon's theorem）：在任意三角形的各邊上向外作等邊三角形，這些等邊三角形的中心構成一個等邊三角形。第 (iii) 部分得到的不等式 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$ 是 Weitzenböck 不等式（Weitzenböck's inequality）。複數（complex numbers）可以給出拿破崙定理一個非常簡潔的證明：旋轉 $60°$ 就是乘以 $e^{i\pi/3}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）把這種處理幾何的方法發展得十分優美。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。